Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1935. Volume III (VIII), № 2 (62)

MATHÉMATIQUES

SOLUTION DU PROBLÈME MIXTE FONDAMENTAL DE L'ÉLASTICITÉ POUR UN DEMIPLAN

Par N. MUSCHELIŠVILI, membre correspondant de l'Académie

Par problème mixte fondamental de l'élasticité j'entends le problème aux limites, très important pour la pratique, dans lequel on demande à déterminer l'équilibre élastique, étant donnés les déplacements des points d'une partie de la frontière et les tensions extérieures agissant sur la partie restante. Je me borne dans cette note au cas de deux dimensions et je suppose, que le corps élastique est limité par une droite indéfinie. Je suppose d'ailleurs, que la partie de la frontière où sont donnés les déplacements, est un segment fini AB. Il est permis d'admettre, sans restreindre la généralité, que les tensions extérieures agissant sur le reste de la frontière sont nulles; en effet, on peut toujours réduire le problème en question à ce cas particulier en utilisant la solution connue (1) du problème pour le cas où les tensions extérieures sont données le long de toute la frontière. Je suppose enfin, que les tensions s'annullent à l'infini et que la résultante générale des efforts extérieurs (inconnus) agissant sur le segment AB est donnée. Le problème ainsi posé correspond au problème (convenablement idéalisé) de la pression d'un bâtiment sur le sol dans le cas où le frottement est assez grand pour empêcher les glissements le long de la ligne de contact. [Dans un autre cas extrême où le frottement est négligeable la solution du problème est beaucoup plus élémentaire (1)].

Prenons comme axe Ox la frontière du corps élastique et dirigeons l'axe Oy vers l'extérieur. Désignons par u, v les composantes du déplacement, par P—la pression normale à la frontière et par T—la tension tangentielle. Cela étant, les conditions aux limites ont la forme suivante:

$$u = g_1 + \text{const}, \quad v = g_2 + \text{const} \qquad (\text{sur } AB), \tag{1}$$

$$P = T = 0 \qquad (\text{sur l'axe } Ox \text{ à l'extérieur de } AB), \tag{2}$$

g_1 et g_2 désignant des fonctions données, qui seront supposées continues. On peut attribuer aux constantes qui figurent dans les seconds membres de (1) des valeurs arbitraires, ce qui correspond à une translation rigide du système entier. On a de plus, d'après l'hypothèse,

$$\int_{AB} T\,dx = K_1, \quad \int_{AB} P\,dx = K_2, \tag{3}$$

K_1 et K_2 étant des constantes données; à savoir $K_1 = X$, $K_2 = -Y$ en désignant par (X, Y) la résultante générale des efforts agissant sur AB.

Si d'ailleurs on connaissait les valeurs de T et de P sur le segment AB, notre problème serait résolu, car les fonctions $\varphi(z)$, $\psi(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$, qui déterminent l'équilibre élastique, seraient données par les formules [cf. (1), § 81]:

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{AB} (P + iT)\log(t - z)\,dt + \text{const},$$

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{AB} (P - iT)\log(t - z)\,dt - z\,\varphi'(z) + \text{const}. \tag{4}$$

En substituant ces expressions dans la formule

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \tag{5}$$

qui détermine les déplacements ($\varkappa > 1$ est une constante élastique*), et en faisant tendre z vers un point τ de AB, on obtient sans difficulté des équations intégrales pour déterminer T et P:

$$\begin{aligned} &\int_{-l}^{+l} T(t)\log|t - \tau|\,dt + \beta\pi\int_{\bullet}^{\tau} P(t)\,dt = -\frac{4\mu\pi}{\varkappa + 1}g_1(\tau) + \text{const} = f_1 + \text{const}, \\ &\int_{-l}^{+l} P(t)\log|t - \tau|\,dt - \beta\pi\int_{\bullet}^{\tau} T(t)\,dt = \frac{4\mu\pi}{\varkappa + 1}g_2(\tau) + \text{const} = f_2 + \text{const}, \end{aligned} \tag{6}$$

où $\beta = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} < 1$, et $2l$ désigne la longueur du segment AB; on suppose, que l'origine O est placée au milieu de AB.

Définissons deux fonctions $U_1 + iV_1$ et $U_2 + iV_2$ de la variable complexe z

$$U_1 + iV_1 = \int_{-l}^{+l} T(t)\log(t - z)\,dt, \quad U_2 + iV_2 = \int_{-l}^{+l} P(t)\log(t - z)\,dt; \tag{7}$$

les parties réelles U_1 et U_2 de ces fonctions sont les potentiels logarithmiques des couches simples étalées sur AB avec les densités respectivement égales à T et P. Il est évident, en tenant compte de la symétrie, que les fonctions $U_1(x, y)$ et $U_2(x, y)$ sont paires par rapport à y. Cela étant, on aura d'après la formule bien connue de la théorie du potentiel

$$T = \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)_+ - \left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)_-\right] = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)_+ \tag{8}$$

et une formule analogue pour P. Les indices $+$ ou $-$ désignent les valeurs, qu'on obtient en s'approchant vers AB de la partie supérieure ($y > 0$) ou inférieure ($y < 0$) du plan.

En tenant compte des relations de Cauchy-Riemann, on déduit de (8):

---

* À savoir $\varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$, λ et μ désignant les constantes de Lamé.

$$\int_0^\tau T(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\tau \left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)_+ dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^\tau \left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)_+ dx = -\frac{1}{\pi}V_1(x,+0)+\text{const} \quad (9)$$

et une formule analogue pour P. Ces formules montrent, avec tout ce qui précède, que la résolution des équations (6) se réduit au problème suivant: déterminer deux fonctions réelles U_1, U_2, continues dans le plan entier, harmoniques à l'extérieur de la coupure AB, qui se comportent à l'infini respectivement comme* $K_1 \log |z|$ et $K_2 \log |z|$ et qui satisfont sur le bord supérieur de la coupure AB aux conditions

$$U_1 - \beta V_2 = f_1 + \text{const}, \quad U_2 + \beta V_1 = f_2 + \text{const}, \quad (10)$$

V_1 et V_2 désignant les fonctions conjuguées de U_1 et U_2 respectivement. Pour résoudre ce problème on peut procéder comme il suit. Effectuons la représentation conforme du plan z, découpé le long de AB, sur l'aire $|\zeta| \geqslant 1$, au moyen de la relation bien connue

$$z = \frac{l}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right). \quad (11)$$

En tenant compte des propriétés imposées aux fonctions cherchées, nous pouvons écrire pour $|\zeta| > 1$:

$$\begin{aligned} U_1 + iV_1 &= K_1 \log \zeta + \sum_1^\infty a_n \zeta^{-n} + \text{const}, \\ U_2 + iV_2 &= K_2 \log \zeta + \sum_1^\infty b_n \zeta^{-n} + \text{const} \end{aligned} \quad (12)$$

a_n, b_n étant des constantes réelles, qu'il s'agit de déterminer. En posant $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$ et en admettant que les fonctions U_1, U_2 et les parties uniformes de V_1, V_2 sont continues sur la circonférence $|\zeta| = 1$ elle-même et que les dévéloppements ci-dessus sont valables aussi pour $\rho = 1$**, on déduit de (10) les relations

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^\infty a_n \cos n\vartheta + \beta \sum_1^\infty b_n \sin n\vartheta &= F_1 + \text{const} \\ \sum_1^\infty b_n \cos n\vartheta - \beta \sum_1^\infty a_n \sin n\vartheta &= F_2 + \text{const} \end{aligned}\right\} \text{pour } 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \quad (13)$$

où $F_1 = f_1 + \beta K_2 \vartheta$, $F_2 = f_2 - \beta K_1 \vartheta$.

En multipliant les deux membres de (13) par $\frac{2}{\pi}\cos m\vartheta$ $(m = 1, 2, \ldots)$ et en intégrant de 0 à π, on obtient le système infini d'équations linéaires à une infinité d'inconnues

$$a_m + \beta \sum_{n=1}^\infty \alpha_{mn} b_n = c'_m, \quad b_m - \beta \sum_{n=1}^\infty \alpha_{mn} a_n = c''_m, \quad (14)$$

où l'on a posé

$$\alpha_{mn} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos m\vartheta \sin n\vartheta \, d\vartheta = \begin{cases} \dfrac{4n}{\pi(n^2 - m^2)} & \text{pour } (m-n) \text{ impair} \\ 0 \quad \text{» » pair} \end{cases} \quad (15)$$

* Cela suit de (7) et (3).

** Il suit de ces hypothèses que les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ sont convergentes.

et c'_m, c''_m désignent les coefficients de Fourier de F_1 et F_2 dans leurs dévéloppements en séries de cosinus dans l'intérvalle $(0, \pi)$.

Si l'on désigne par S la substitution linéaire avec le tableau infini (α_{mn}) $(m, n = 1, 2,...)$, par $\mathbf{a}$—le «vecteur» avec les composantes a_m $(m = 1, 2,...)$, par $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}'$, $\mathbf{c}''$ — les «vecteurs» analogues, on pourra écrire le système (14) sous la forme abregée

$$\mathbf{a} + \beta S(\mathbf{b}) = \mathbf{c}', \quad \mathbf{b} - \beta S(\mathbf{a}) = \mathbf{c}''. \tag{16}$$

Il est aisé de voir, que le tableau (α_{mn}) $(m, n = 1, 2,...)$, complété par une ligne α_{0n} $(= 1,$ $\alpha_{0n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin n\vartheta \, d\vartheta = \frac{2}{n\pi}$ ou 0, est le tableau d'une substitution orthogonale complète S_0. Cela résulte du fait que chacun des deux systèmes de fonctions orthogonales et normales

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\vartheta, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2\vartheta, \ldots, \text{ et } \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\vartheta, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2\vartheta, \ldots \tag{A}$$

est complet. On en conclut immédiatement que la substitution S_0 est bornée, sa borne étant égale à celle de S_0, c'est à dire à 1.

En éliminant $\mathbf{b}$ des relations (16), on obtient le système

$$\mathbf{a} + \beta^2 S^2(\mathbf{a}) = \mathbf{c}, \quad \text{avec } \mathbf{c} = \mathbf{c}' - \beta S(\mathbf{c}''). \tag{17}$$

La borne de $S^2 = S \cdot S$ est égale à 1 et nous savons en outre que $\beta^2 < 1$. Il est bien connu* que dans ces conditions le système (17) admet une solution unique (telle que la série $\sum a_n^2$ soit convergente); d'ailleurs cette solution est fournie par la série

$$\mathbf{a} = [1 + \beta^2 S^2]^{-1}(\mathbf{c}) = \mathbf{c} - \beta^2 S^2(\mathbf{c}) + \beta^4 S^4(\mathbf{c}) - \ldots \tag{18}$$

Les a_k étant ainsi déterminées, on trouve les b_k à l'aide de la deuxième des relations (14) ou (16). Tout ce que nous pouvons affirmer pour le moment c'est que les a_k et les b_k définissent deux fonctions à carrés sommables dont ces quantités sont les coefficients de Fourier par rapport au premier des systèmes (A).

Mais il est aisé de démontrer que si les fonctions données f_1 et f_2 ont par exemple des dérivées bornées par rapport à ϑ dans l'intérvalle $(0,\vartheta)$, alors les séries dans (13) et, à plus forte raison, les séries dans (12) sont absolument et uniformément convergentes et définissent les fonctions $U_1 + iV_1$ et $U_2 + iV_2$ jouissant des propriétés cherchées. Ces fonctions étant ainsi trouvées, on trouvera immédiatement les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ d'après les formules (4) et (7).

Institut mathématique V. Stekloff
de l'Académie des Sciences de l'URSS. Moscou

Manuscrit reçu
23. VI. 1935

LITTÉRATURE CITÉE

[1] N. Muschelišvili, Quelques problèmes fondamentaux de la théorie mathématique de l'élasticité (en russe), 2me édition 1935, §§ 81, 86—90. [2] N. Muschelišvili, Math. Ann., Bd. 107, 1932, pp. 282—312. [3] F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris, 1913.

* Cf. par ex. ([3]), p. 92 et suiv.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1935. Volume III (VIII), № 2 (62)

MATHEMATIK

DIE BRUNN-MINKOWSKISCHE UNGLEICHUNG FÜR BELIEBIGE MESSBARE MENGEN

VON L. LUSTERNIK

(Vorgelegt von N. Lusin, Mitglied der Akademie, d. 7. VI. 1935)

Es seien A und B Punktmengen im n-dimensionalen euklidischen Raum E_n, und s und s_1 positive Zahlen. Wir bezeichnen mit $sA+s_1B$ die Menge aller Punkte $sp+s_1q$ für die $p \subset A$, $q \subset B$ (hierbei ist die Summe $sp+s_1q$ als Vektorsumme zu verstehen). $J_n(A)$ ist das n-dimensionale Lebesguesche Mass der Menge A.

S a t z. *Es gilt für beliebige A und B die Ungleichung*:

$$\sqrt[n]{J_n(sA+s_1B)} \geqslant s\sqrt[n]{J_n(A)} + s_1\sqrt[n]{J_n(B)}. \tag{1}$$

Die Ungleichung (1) *geht in eine Gleichung über dann und nur dann, wenn entweder*

1) *eine der Mengen A und B ein einziger Punkt ist,*

oder

2) $J_n(A+B) - J_n(A) = J_n(B) = 0$,

oder

3) *A und B homothetische konvexe Körper sind (oder durch Ausschluss von Mengen des Masses 0 aus solchen Körpern entstehen).*

Die Ungleichung (1) ist eine Verallgemeinerung der Brunn-Minkowskischen Ungleichung für Volumina konvexer Körper. Es genügt, sie für den Fall $s = s_1 = 1$ zu beweisen:

$$\sqrt[n]{J_n(A+B)} \geqslant \sqrt[n]{J_n(A)} + \sqrt[n]{J_n(B)}. \tag{2}$$

B e w e i s. Es sind folgende Fälle möglich:

1) $J_n(A) - J_n(B) = 0$ (trivial).

2) $J_n(A) > 0$, $J_n(B) = 0$. Es ist leicht zu beweisen, dass, wenn B aus mehr als einem Punkt besteht, $J_n(A+B) > J_n(A)$.

3) $J_n(A) > 0$; B ist unbeschränkt. Dann ist $J_n(A+B) = \infty$.

4) H a u p t f a l l. A und B sind beschränkte Mengen von dem positiven Lebesgueschen Mass.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: Es sei A^* die Menge aller Punkte aus A die relativ zu A die Dichte 1 haben, $\mathfrak{M}_n(A)$ das Trägheitsmoment der Menge A in bezug auf den Nullpunkt; $d(A)$ der Durchmesser der Menge A; L_0 eine Gerade, die durch den Nullpunkt geht und zu der die $(n-1)$-dimensionale Ebene M_0 orthogonal ist. Es seien L_q die Parallelen zu L_0 durch die Punkte $q \subset M_0$ und M_p die $(n-1)$-dimensionalen Ebenen, die orthogonal zu L_0 in den Punkten p sind.

Wir werden den Satz durch vollständige Induktion beweisen. Für den Fall $n=1$ (wenn A und B lineare Mengen sind) lässt sich sogar folgende Ungleichung leicht beweisen:

$$J_1(A+B) \geqslant J_1(A) + J_1(B) + \frac{hJ_1(B)}{2d(B)}. \tag{3}$$

Hier bezeichnet h die Länge eines zu A komplementären Intervalls.

Es sei die Ungleichung (2) gültig für die Mengen, die in E_k $(k<n)$ liegen. Es seien jetzt A und B in E_n gelegen. Dann transformieren wir diese Mengen durch den Schwarz'schen Abrundungsprozess relativ zu L_0 [dass heisst, jeder nicht leere Durchschnitt $A \times M_p$ wird durch eine $(n-1)$-dimensionale Kugel $A_p \subset M_p$ mit dem Mittelpunkt im p ersetzt, wobei $J_{n-1}(A_p) = J_{n-1}(A \times M_p)$ ist].

A und B gehen dabei in Mengen A' und B' über. Aus der Induktionshypothese folgt:

$$J_n(A'+B') \leqslant J_n(A+B). \tag{4}$$

Wir haben auch:

$$J_n(A') = J_n(A), \quad J_n(B') = J_n(B) \tag{5}$$

und

$$\mathfrak{M}_n(A') \leqslant \mathfrak{M}_n(A), \quad \mathfrak{M}_n(B') \leqslant \mathfrak{M}_n(B). \tag{6}$$

Jetzt wenden wir auf A' und B' relativ zu M_0 die Steiner'sche Symmetrisierung an. A' und B' gehen in A_1 und B_1 über, wobei

$$J_n(A_1+B_1) \leqslant J_n(A'+B'), \quad J_n(A_1) = J_n(A'), \quad J_n(B_1) = J_n(B'),$$
$$\mathfrak{M}_n(A_1) \leqslant \mathfrak{M}_n(A'), \quad \mathfrak{M}_n(B_1) \leqslant \mathfrak{M}_n(B').$$

A_1 und B_1 sind Rotationskörper, ihre Begrenzung ist durch Rotation ebener Kurven a_1 und b_1 entstanden (1). Die Länge von a oder b überschreitet die Zahl $2d(A)$, bzw. $2d(B)$, nicht.

Wir nennen Nacheinanderausführung dieser beiden Operationen (von Schwarz und von Steiner) die L_0-Operation.

Wir wählen eine andere Achse L_0', die durch O geht, und bilden zwei Folgen von Rotationskörpern:

$$A_1, A_2, \ldots, A_{2m}, A_{2m+1}, \ldots; \quad B_1, B_2, \ldots, B_{2m}, B_{2m+1}, \ldots$$

Jeder Körper A_{2m+1} (B_{2m+1}) entsteht durch Anwendung einer L_0-Operation relativ zu A_{2m} (B_{2m}); jeder Körper A_{2m} (B_{2m}) durch Anwendung einer L_0'-Operation relativ zu A_{2m-1} (B_{2m-1}). Alle A_m und B_m sind Körper deren Begrenzung durch Rotation von ebenen Kurven a_m und b_m um die Achsen L_0

und L_0' entstanden sind. Dabei sind die Längen aller a_m, bzw. b_m, nicht grösser als $d(A)$, bzw. $d(B)$. Wir haben:

$$J_n(A+B) \geqslant J_n(A_1+B_1) \geqslant J_n(A_2+B_2) \geqslant \ldots \geqslant J_n(A_m+B_m) \geqslant \ldots \quad (4')$$

$$J_n(A) = J_n(A_1) = J_n(A_2) = \ldots = J_n(A_m) = \ldots; \quad J_n(B) = J_n(B_1) = \\ = J_n(B_2) = \ldots = J_n(B_m) = \ldots \quad (5')$$

$$\mathfrak{M}_n(A) \geqslant \mathfrak{M}_n(A_1) \geqslant \mathfrak{M}_n(A_2) \geqslant \ldots \geqslant \mathfrak{M}_n(A_m) \geqslant \ldots; \quad \mathfrak{M}_n(B) \geqslant \\ \geqslant \mathfrak{M}_n(B_1) \geqslant \mathfrak{M}_n(B_2) \geqslant \ldots \geqslant \mathfrak{M}_n(B_m) \geqslant \ldots \quad (6')$$

Die Kurvenfolgen a_m, b_m sind auf Grund des Hilbertschen Satzes kompakt. Man kann daraus Teilfolgen a_{m_i}, b_{m_i} auswählen, die gegen Grenzkurven a_ω, bzw. b_ω, konvergieren. Die entsprechenden Körper A_{m_i}, B_{m_i} konvergieren dann gegen die Körper A_ω, B_ω, wobei die Begrenzung von A_ω, B_ω durch Rotation der Kurven a_ω, b_ω um L_0, L_0' entsteht.

Man kann beweisen (2), dass die L_0- und L_0'-Operationen die Grössen $M_n(A_\omega)$, bzw. $M_n(B_\omega)$, nicht verkleinern. Daraus folgt: A_ω und B_ω sind bis auf Mengen vom Masse 0 Drehungskörper gleichzeitig um L_0 und L_0'.

Jetzt kann man leicht beweisen, dass A_ω und B_ω n-dimensionale Kugeln sind. Für die Kugeln gilt aber die Gleichung:

$$\sqrt[n]{J_n(A_\omega + B_\omega)} = \sqrt[n]{J_n(A_\omega)} + \sqrt[n]{J_n(B_\omega)}. \quad (7)$$

Aus (4'), (5'), und (7) aber folgt:

$$\sqrt[n]{J_n(A+B)} \leqslant \sqrt[n]{J_n(A)} + \sqrt[n]{J_n(B)}.$$

Damit ist die Ungleichung (2) bewiesen.

Jetzt wollen wir untersuchen, wann diese Ungleichung in eine Gleichung übergeht.

F a l l 1. Mindestens eine der Mengen $\overline{A^*}$, $\overline{B^*}$ (z. B. $\overline{A^*}$) ist kein konvexer Körper. Wir bezeichnen mit $P(M_0, h)$ die Menge aller Punkte q einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene M_0, für die der abgeschlossene Durchschnitt $\overline{L_p \times A^*}$ nicht leer ist und ein zu ihm komplementiertes Intervall der Länge $> h$ besitzt. Es gibt eine Ebene M_0 und eine positive Zahl h, für die $J_{n-1}[P(M_0, h)] > 0$ ist.

Es seien A_1 und B_1 durch Symmetrisierung von A und B relativ zu dieser Ebene M_0 gebildet.

Wir addieren jetzt jeden $L_q \times A$ zu jedem $L_{q_1} \times B$, um die Summe $A+B$ zu bilden. Aus der Ungleichung (3) für lineare Mengen folgt:

$$J_n(A+B) > J_n(A_1+B_1).$$

Da aber

$$\sqrt[n]{J_n(A_1+B_1)} \geqslant \sqrt[n]{J_n(A_1)} + \sqrt[n]{J_n(B_1)} = \sqrt[n]{J_n(A)} + \sqrt[n]{J_n(B)},$$

so folgt:

$$\sqrt[n]{J_n(A+B)} > \sqrt[n]{J_n(A)} + \sqrt[n]{J_n(B)}.$$

F a l l 2. $\overline{A^*}$ und $\overline{B^*}$ sind konvexe Körper. Wenn die Mengen A oder B Punkte besitzen, die ausserhalb $\overline{A^*}$, bzw. $\overline{B^*}$, liegen, so ist leicht zu beweisen, dass wir wieder den Fall einer wirklichen Ungleichung haben.

Es sei also $A \subset \overline{A^*}$, $B \subset \overline{B^*}$. Da die Mengen A^* und B^* dicht auf $\overline{A^*}$, bzw. $\overline{B^*}$, sind und relativ zu sich selbst in jedem Punkt die Lebesguesche Dichte 1 besitzen, folgt, dass $A^* + B^* \subset A + B$ auf dem konvexen Körper $\overline{A^*} + \overline{B^*}$ dicht ist, und dass jeder innere Punkt dieses Körpers relativ zu $A + B$ die Lebesguesche Dichte 1 hat. Daraus folgt:

$$J_n(\overline{A^*} + \overline{B^*}) = J_n(A + B).$$

Wenn $J_n(A) < J_n(\overline{A^*})$ oder $J_n(B) < J_n(\overline{B^*})$, so haben wir die wirkliche Ungleichung (2). Es bleibt also nur den Fall zu untersuchen, wann A und B mit den konvexen Körpern $\overline{A^*}$ und $\overline{B^*}$ zusammenfallen (oder aus diesen durch Ausschluss einer Menge vom Masse 0 entstehen). Aus den klassischen Untersuchungen von Minkowski über konvexe Körper folgt, dass die Ungleichung (2) nur dann in eine Gleichung übergeht, wenn diese Körper homothetisch sind.

Steklоffsches mathematisches Institut
der Akademie der Wissenschaften
der UdSSR. Moskau.

Eingegangen
d. 7. VI. 1935

LITERATUR

[1] Bonnesen, Acta Math., Bd. 48. [2] Blaschke, Kreis und Kugel.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1935. Volume III (VIII), № 2 (62)

MATHEMATIK

VERALLGEMEINERUNG EINES GRUPPENTHEORETISCHEN SATZES VON LANDAU

Von W. TURKIN

(Vorgelegt von I. M. Vinogradow, Mitglied der Akademie, d. 27. V. 1935)

In seiner Arbeit «Über die Klassenzahl der binären quadratischen Formen von negativer Discriminante» (1) hat E. Landau folgenden Satz bewiesen:

Es sei h eine ganze positive Zahl. Es gibt nur eine endliche Anzahl nichtisomorpher endlicher Gruppen, die genau h Klassen konjugierter Elemente enthalten.

In vorliegender Arbeit beweist der Verfasser einen allgemeineren Satz:

Es sei

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{k-1},\ \alpha_k$$

eine endliche Reihe ganzer positiver Zahlen. Es gibt nur eine endliche Anzahl nichtisomorpher endlicher Gruppen, in denen solche κ—1 Untergruppen enthalten sind, dass für ihre Indizes

$$i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{k-1}$$

die Gleichung

$$\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \ldots + \alpha_{k-1} i_{k-1} + \alpha_k = n$$

(*n ist die Ordnung der Gruppe*) *besteht.*

Die Methode, nach der wir unseren Satz beweisen, ist eine natürliche Verallgemeinerung der Landau'schen Methode.

Ist $\kappa=1$, so kommen wir zu dem bekannten Satz, dass es nur eine endliche Anzahl nichtisomorpher Gruppen gibt, deren Ordnung nicht grösser als eine vorgegebene Zahl ist. Deshalb können wir weiter voraussetzen dass $\kappa > 1$.

Wir können unsere Grundgleichung so schreiben:

$$\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \ldots + \alpha_{k-1} i_{k-1} + \alpha_k i_k = n$$

(hier ist $i_k = 1$). Es sei

$$g_\mu = \frac{n}{\alpha_\mu i_\mu}.$$

Dann haben wir:

$$1 = \frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \ldots + \frac{1}{g_{k-1}} + \frac{1}{g_k}. \tag{1}$$

g_μ ist eine Zahl von der Form

$$\frac{A}{m},$$

wo A eine ganze Zahl ist und m das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k.$$

Augenscheinlich ist

$$g_\mu > 1;$$

deshalb ist

$$g_\mu \geqslant 1 + \frac{1}{m}$$

und

$$\frac{1}{g_\mu} \leqslant \frac{m}{1+m}.$$

Schreiben wir die Zahlen g_μ ihrer Grössenordnung nach:

$$g_{j_1}, g_{j_2}, \ldots, g_{j_{k-1}}, g_{j_k};$$

hier ist

$$g_{j_\mu} \geqslant g_{j_{\mu+1}}.$$

Aus der Gleichung

$$1 = \frac{1}{g_{j_1}} + \frac{1}{g_{j_2}} + \ldots + \frac{1}{g_{j_{k-1}}} + \frac{1}{g_{j_k}}$$

folgt

$$1 \leqslant \frac{1}{g_{j_k}} + \frac{1}{g_{j_k}} + \ldots + \frac{1}{g_{j_k}} + \frac{1}{g_{j_k}} = \frac{k}{g_{j_k}}$$

und deshalb

$$g_{j_k} \leqslant k.$$

Weiter haben wir:

$$1 - \frac{1}{g_{j_k}} = \frac{1}{g_{j_1}} + \frac{1}{g_{j_2}} + \ldots + \frac{1}{g_{j_{k-1}}} \leqslant \frac{1}{g_{j_{k-1}}} + \frac{1}{g_{j_{k-1}}} + \ldots + \frac{1}{g_{j_{k-1}}} = \frac{k-1}{g_{j_{k-1}}}$$

und deshalb

$$g_{j_{k-1}} \leqslant \frac{k-1}{1 - \frac{1}{g_{j_k}}} \leqslant \frac{k-1}{1 - \frac{m}{1+m}} = (k-1)\,(m+1).$$

Auf diese Weise haben wir für die Zahlen g_{j_k} und $g_{j_{k-1}}$ obere Schranken gefunden; diese Schranken sind Funktionen der Grössen

$$k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k.$$

Wollen wir jetzt voraussetzen dass folgende Ungleichungen bewiesen sind:

$$\left.\begin{aligned} g_{j_k} &\leqslant G_{j_k}, \\ g_{j_{k-1}} &\leqslant G_{j_{k-1}}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ g_{j_l} &\leqslant G_{j_l} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(hier sind G_{j_μ} irgendwelche Ausdrücke, die von

$$k,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{k-1},\ \alpha_k$$

abhängen). Man kann beweisen, dass in diesem Falle auch für $g_{j_{l-1}}$ eine analoge boere Schranke existiert: wir haben

$$1-\frac{1}{g_{j_k}}-\frac{1}{g_{j_{k-1}}}-\ldots-\frac{1}{g_{j_l}}=\frac{1}{g_{j_1}}+\frac{1}{g_{j_2}}+\ldots+\frac{1}{g_{j_{l-1}}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{g_{j_{l-1}}}+\frac{1}{g_{j_{l-1}}}+\ldots+\frac{1}{g_{j_{l-1}}}=\frac{l-1}{g_{j_{l-1}}}$$

und deshalb

$$g_{j_{l-1}}\leqslant\frac{l-1}{1-\frac{1}{g_{j_k}}-\frac{1}{g_{j_{k-1}}}-\ldots-\frac{1}{g_{j_l}}}.$$

Der Ausdruck

$$1-\frac{1}{g_{j_k}}-\frac{1}{g_{j_{k-1}}}-\ldots-\frac{1}{g_{j_l}}$$

kann nach (2) nur endlich viele Werte annehmen; deshalb hat dieser Ausdruck eine untere Schranke. Diese Schranke ist nach (1) positiv. So bekommen wir:

$$g_{j_{l-1}}\leqslant G_{j_{l-1}};$$

hier ist $G_{j_{l-1}}$ eine Funktion von

$$k,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{k-1},\ \alpha_k.$$

Auf solche Weise kann man obere Schranken für alle g_μ finden; unter anderen auch für

$$g_k=\frac{n}{\alpha_k}.$$

Aber dann ist eine obere Schranke auch für die Ordnung n unserer Gruppe gefunden. Es gibt aber, wie bekannt, nur eine endliche Anzahl nichtisomorpher Gruppen, deren Ordnung nicht grösser als eine vorgegebene Zahl ist. Und so ist unser Satz bewiesen.

Der vorhin erwähnte Satz von Landau ist ein Sonderfall unseres Satzes. Es sei h die Anzahl der Klassen konjugierter Elemente in unserer Gruppe und sei c die Anzahl der Klassen, die aus einem einzigen Element bestehen. Dann ist

$$n=\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{h-c}+c;$$

hier sind ν_μ die Ordnungen der Klassen, die grösser als 1 sind. Die Ordnung einer Klasse konjugierter Elemente ist gleich dem Index des Normalisators eines Elementes der Klasse; deshalb bekommen wir folgenden Sonderfall unseres Satzes:

$$k = h + 1, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{k-1} = 1, \quad \alpha_k = c.$$

Energetisches Institut
Moskau

Eingegangen
d. 27. V. 1935

LITERATUR

Landau, Math. Ann., 56.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1935. Volume III (VIII), № 2 (62)

MATHÉMATIQUES

SUR UNE MÉTHODE DE RÉSOLUTION DES PROBLÈMES LIMITES POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR D. PANOV

(Présenté par S. Tchapliguin, de l'Académie, le 25. V. 1935)

1. La résolution de certains problèmes limites de l'équation de Laplace (ou bien de l'équation de Poisson, de l'équation biharmonique, etc.) pour un domaine étroit et allongé présente un intérêt considérable dans bien des questions de théorie de l'élasticité, d'hydrodynamique et d'autres branches de la physique mathématique. On peut dans ces cas résoudre le problème au moyen d'un développement en série suivant les puissances d'un paramètre introduit dans l'équation du contour du domaine.

M. Duncan [1] a considéré de pareils développements pour résoudre approximativement des problèmes de torsion et de flexion des tiges. Il n'examinait pas, d'ailleurs, la convergence des appoximations par lui construites, se bornant à en vérifier l'exactitude au moyen de théorèmes sur les inégalités différentielles*. Dans la présente note nous nous proposons de donner une base à l'emploi de pareils développements en partant de considérations un peu différentes de celles de Duncan. Nous considérerons, tout comme Duncan, l'équation de Poisson, ce qui d'ailleurs n'est aucunement lié à la nature du procédé. La méthode peut être appliquée à la résolution des problèmes les plus divers du type indiqué pour différents domaines et différentes conditions limites**.

2. Le problème de la torsion d'une tige prismatique se réduit à la résolution de l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2$$

* En faisant usage de ces théorèmes, Duncan ne cite pas le mémoire précédemment publié de S. Tchapliguin, qui lui est sans doute resté inconnu [2].

** Un mémoire détaillé sera bientôt publié.

avec la condition limite $\phi = 0$ le long de la courbe

$$F(x, y) = 0$$

limitant la section transversale de la tige. Soit

$$F(x, y) = y^2 - \lambda^2 f^2(x). \tag{2}$$

En posant $y = \lambda\eta$, nous réduisons le problème à celui de trouver une fonction

$$\varphi(x, \eta) = \phi(x, \lambda\eta),$$

satisfaisant à l'équation

$$\lambda^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + 2\lambda^2 = 0 \tag{3}$$

avec la condition limite $\varphi = 0$ sur la courbe

$$\eta^2 - f^2(x) = 0. \tag{4}$$

Cherchons la solution sous forme d'une série rangée suivant les puissances de λ^2:

$$\varphi(x, \eta) = P_0(x, \eta) + \lambda^2 P_1(x, \eta) + \lambda^4 P_2(x, \eta) + \ldots \tag{5}$$

Comme φ est identiquement nulle lorsqu'on pose $\eta = \pm f(x)$, chaque coefficient de λ doit posséder la même propriété.

Ainsi

$$P_n(x, \eta) = 0 \tag{6}$$

sur le contour

$$\eta^2 - f^2(x) = 0.$$

Substituant la série (5) dans l'équation (3) et égalant à zéro les coefficients des puissances de λ, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 P_0}{\partial\eta^2} = 0, \\ &\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial\eta^2} + 2 = 0, \\ &\frac{\partial^2 P_{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial\eta^2} = 0. \quad (n = 2, 3, \ldots) \end{aligned} \tag{7}$$

Les équations (7) et les conditions (6) permettent de trouver les fonctions P_n l'une après l'autre. En effectuant les calculs, nous obtenons

$$\begin{aligned} &P_0(x, \eta) = 0, \\ &P_1(x, \eta) = f^2(x) - \eta^2, \\ &P_2(x, \eta) = \frac{1}{2!}[D^2 f^2(x)][f^2(x) - \eta^2], \\ &P_3(x, \eta) = \frac{1}{2!}\{f^2(x)\, D^4 f^2(x) + 2D^3 f^2(x) \cdot Df^2(x) + \\ &\qquad + [D^2 f^2(x)]^2\}[f^2(x) - \eta^2] - \frac{1}{4!}[D^4 f^2(x)][f^4(x) - \eta^4], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En supposant la fonction $f^2(x)$ analytique satisfaisant à certaines conditions complémentaires, on peut démontrer, que la série (5) converge uniformément dans le domaine limité par le contour (4) pour λ suffisament petit. Dans certains cas on peut trouver la somme de la série (5). Par exemple, en posant $f^2(x) = a^2 - x^2$ nous obtenons la résolution bien connue du problème de torsion pour un ellipse $y^2 - \lambda^2(a^2 - x^2) = 0$; la série correspondante converge pour $|\lambda| < 1$.

En nous bornant pour les domaines allongés et étroits (qui s'obtiennent pour des λ petits) aux premiers membres de la série (5), nous obtenons des solutions approchées convenables pour le problème limite envisagé.

Remplaçant η par $\frac{y}{\lambda}$ et portant les valeurs de P_n dans la série (5) nous obtenons

$$\begin{aligned}\psi(x, y) = [\lambda^2 f^2(x) - y^2] + \lambda^2 \left\{ \left[\frac{1}{2!} D^2 f^2(x) \right] [\lambda^2 f^2(x) - y^2] - \right. \\ - \frac{1}{4!} [D^4 f^2(x)] [\lambda^4 f^4(x) - y^4] + \ldots \Big\} + \lambda^4 \left\{ \left[\frac{1}{2!} f^2(x) D^4 f^2(x) + \right. \right. \\ \left. \left. + [D^3 f^2(x)] [D f^2(x)] + \frac{1}{2} [D^2 f^2(x)]^2 \right] [\lambda^2 f^2(x) - y^2] + \ldots \right\} + \ldots \end{aligned} \tag{8}$$

3. En nous servant de l'expression trouvée (8) pour la fonction $\psi(x, y)$, nous pouvons démontrer que pour les tiges dont la section transversale est limitée par la courbe (2)

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{T}{J} = 4, \tag{9}$$

$T[cm^4]$ désignant ici la rudesse géométrique de la torsion, J le moment d'inertie par rapport à l'axe OX. Remarquons d'ailleurs que la relation (9) est équivalente dans le cas d'un profil symétrique à ce résultat de Griffith (3), non démontré par lui, que pour les profils minces

$$T \approx \frac{1}{3} \int_a^b t^3 dx,$$

où t est l'épaisseur du profil en fonction de x, et x est compté le long de la corde $a \leqslant x \leqslant b$.

On sait que

$$T = 2 \iint_G \psi(x, y)\, dx\, dy. \tag{10}$$

Portant ici l'expression (8) pour $\psi(x, y)$, nous obtenons

$$T = 2 \int_a^b \int_{-\lambda f(x)}^{+\lambda f(x)} \frac{1}{2} [D^2 f^2(x)] [\lambda^2 f^2(x) - y^2]\, dx\, dy + 2\lambda^2 \int_a^b \int_{-\lambda f(x)}^{+\lambda f(x)} \frac{1}{2} [D^2 f^2(x)] \cdot$$

$$\cdot [\lambda^2 f^2(x) - y^2]\, dx\, dy + \ldots = \frac{8}{3} \lambda^3 \int_a^b f^3(x)\, dx + O(\lambda^5).$$

D'autre part nous avons

$$J = \int_a^b \int_{-\lambda f(x)}^{+\lambda f(x)} y^2\,dx\,dy = \frac{2}{3}\lambda^3 \int_a^b f^3(x)dx.$$

Par conséquent

$$T = 4J + O(\lambda^5),$$

d'où résulte (9).

Institut mathématique de l'Université
de Moscou

Manuscrit reçu
le 25. V. 1935

LITTÉRATURE CITÉE

[1] W. Duncan, R. & M., No 1444. [2] Tchapliguin, S.—Éléments d'un nouveau procédé d'intégration approchée des équations différentielles, Moscou, 1919. [3] A. A. Griffith, R. & M., No 334, § 9.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1935. Volume III (VIII), № 2 (62)

ASTRONOMY

GENERAL FORMULAE FOR THE DEVELOPMENT OF PERTURBING FORCES IN THE CALCULATION OF ABSOLUTE PERTURBATIONS IN POLAR COORDINATES

By B. NUMEROV,

Corresponding Member of the Academy

1. The inter-relation between the true anomaly of the perturbing and the perturbed planet. In our preceding paper [1] we have deduced general formulae for the development of the perturbing forces by four arguments:

$$R = \sum R(s, m, i, i') \cos(sl + m\gamma) \cos i\varphi \cos i' \varphi';$$
$$T = \sum T(s, m, i, i') \sin(sl + m\gamma) \cos i\varphi \cos i' \varphi';$$
$$\operatorname{cosec} j\, Z = \sum Z(s, m, i, i') \sin(sl + m\gamma) \cos i\varphi \cos i' \varphi'.$$

The coefficients $R(s, m, i, i')$, $T(s, m, i, i')$, $Z(s, m, i, i')$ are represented as a series by powers of small quantities e, e', j, and α. The arguments in the development (1) are the true anomalies φ, φ' and longitudes l and l', reckoned from the node of the intersection of orbits in the unperturbed motion of the asteroid and the perturbing planet.

We can write the following correlations between the longitudes and the true anomalies:

$$l = A + \varphi;\ \gamma = l' - l = A' + \varphi' - \varphi. \tag{2}$$

The constants A and A' are determined from the conditions

$$A = \omega - \Delta;\ A' = \omega' - \omega - \Delta' + \Delta;$$
$$\sin\frac{\Delta' - \Delta}{2} \cos\frac{j}{2} = -\cos\frac{i + i'}{2} \sin\frac{\Omega' - \Omega}{2};$$
$$\cos\frac{\Delta' - \Delta}{2} \cos\frac{j}{2} = \cos\frac{i - i'}{2} \cos\frac{\Omega' - \Omega}{2};$$
$$\sin\frac{\Delta' + \Delta}{2} \sin\frac{j}{2} = \sin\frac{i + i'}{2} \sin\frac{\Omega' - \Omega}{2}; \tag{3}$$
$$\cos\frac{\Delta' + \Delta}{2} \sin\frac{j}{2} = -\sin\frac{i - i'}{2} \cos\frac{\Omega' - \Omega}{2};$$

where i, Ω, ω (i', Ω' ω') are the inclination, the longitude of the node, and the distance of the perihelion from the node for the asteroid and the perturbing planet respectively.

Formulae (2) and the inter-relation between the true anomaly v and v', determined from the conditions:

$$v' = v + \psi + \varepsilon; \quad \psi = (n-1)\, v + (M'_0 - n M_0);$$

$$\varepsilon = nf(v, e) - f(v' e'); \quad f(v, e) = \int_0^v \left\{ \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e\cos v)^2} - 1 \right\} dv, \tag{4}$$

allow to pass from four arguments in the development (1) to two arguments v and ψ. In formula (4) $n = \frac{\mu'}{\mu}$ is the relation of the diurnal motions of the planets, and M_0 and M'_0 are the mean anomalies of the planets at the given initial moment.

The function $f(v, e)$ is developed into a series by powers of the eccentricity, and consequently the angle ε may also be developed into a series by powers e, e' and arguments of the angles v and v'. Further, substituting for v' on the basis of the first equation of system (4), we can write the following development for ε, ε^2, and ε^3 by arguments of the angles v and ψ.

$$\varepsilon = \sum \varepsilon^{(1)}(i, i') \sin(iv + i'\psi); \; \varepsilon^2 = \sum \varepsilon^{(2)}(i, i') \sin(iv + i'\psi);$$
$$\varepsilon^3 = \sum \varepsilon^{(3)}(i, i') \sin(iv + i'\psi). \tag{5}$$

In Table 1 are given the coefficients $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, and $\varepsilon^{(3)}$ calculated to the third power of small quantities e and e'.

Table 1

i	i'	$\varepsilon^{(1)}$	$\varepsilon^{(2)}$	$\varepsilon^{(3)}$
0	0	—	$2n^2e^2 + 2e'^2$	—
1	0	$-2ne$	$-\frac{3}{2} n^2e^3$	$-6n^3e^3 - 12nee'^2$
2	0	$\frac{3}{4} ne^2$	$-2n^2e^2$	—
3	0	$-\frac{1}{3} ne^3$	$\frac{3}{2} n^2e^3$	$2n^3e^3$
0	1	$2nee'$	$-4nee'$	—
1	1	$2e' - \frac{1}{4} e'^3 - 2n^2e'e^2$	$\frac{5}{2} e'^3 + 8n^2e'e^2$	$12n^2e'e^2 + 6e'^3$
2	2	$\frac{5}{4} e'^2$	$-2e'^2$	—
3	3	$\frac{13}{12} e'^3$	$-\frac{5}{2} e'^3$	$-2e'^3$
3	1	$\frac{3}{4} ne'e^2 + n^2e'e^2$	$-\frac{3}{2} ne'e^2 - 4n^2e'e^2$	$-6n^2e'e^2$
3	2	$-\frac{5}{2} nee'^2$	$\frac{13}{2} nee'^2$	$6nee'^2$
1	2	$\frac{5}{2} nee'^2$	$-\frac{13}{2} nee'^2$	$-6nee'^2$
2	1	$-2nee'$	$4nee'$	—
1	−1	$\frac{3}{4} ne'e^2 - n^2e'e^2$	$\frac{3}{2} n'e^2 - 4n^2e'e^2$	$6n^2e'e^2$

Further we shall need the development of $\sin q\varphi'$ and $\cos q\varphi'$ with an arbitrary integral value of the coefficient q. We can write the required development in the form:

$$\begin{aligned}\sin q\varphi' &= 4\sum [S(q,\ p,\ p') - C(q,\ p,\ p')]\sin(p\varphi + p'\psi);\\ \cos q\varphi' &= 4\sum [S(q,\ p,\ p') + C(q,\ p,\ p')]\cos(p\varphi + p'\psi).\end{aligned} \tag{6}$$

It should be remembered that

$$S(-q,\ p,\ p') = C(q,\ p,\ p'). \tag{7}$$

On the basis of the first formula of system (4) and formula (5) the development coefficients $\sin q\varphi'$ and $\cos q\varphi'$ may be expressed by the coefficients $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ and $\varepsilon^{(3)}$.

In comparing the developments obtained with formula (6) we can write the formulae for the computation of the required functions:

$$\begin{aligned}&\text{If } p = (q+i) > 0 \text{ and } p' = (q+i') > 0, \text{ then } S(q,\ p,\ p') =\\ &\qquad = A(q,\ i,\ i') \text{ and } C(q,\ p,\ p') = 0.\\ &\text{If } p = (q-i) \geqslant 0 \text{ and } p' = (q-i') \geqslant 0, \text{ then } S(q,\ p,\ p') =\\ &\qquad = A(-q,\ i,\ i') \text{ and } C(q,\ p,\ p') = 0.\end{aligned} \tag{8}$$

In particular, at

$p = 0$ and $p' = 0$ we have $S(q,\ 0,\ 0) = C(q, 0, 0) = \frac{1}{2} A(-q,\ i,\ i')$;

$p < 0$ and $p' < 0$ we have $S(q,\ -p,\ -p') = 0$; $C(q,\ -p,\ -p') =$
$= A(-q,\ i,\ i')$,

where we put

$$\begin{aligned}A(q,\ i,\ i') &= \tfrac{1}{8} q\varepsilon^{(1)}(i,\ i') - \tfrac{1}{16} q^2\varepsilon^{(2)}(i,\ i') - \tfrac{1}{48}\varepsilon^{(3)}(i,\ i');\\ A(q,\ 0,\ 0) &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} q^2\varepsilon^{(2)}(i,\ i').\end{aligned} \tag{9}$$

A. Tjacht, an aspirant of the Astronomical Institute, has calculated the functions S and C for the values of q from 1 to 11. Moreover, he obtained, on the basis of Lagrange's formula, the general formulae for the calculation of $\cos q\varphi'$ and $\sin q\varphi'$ to the 7th power of small quantities.

2. The development of perturbing forces by two arguments. On the basis of formulae (2) and (6) we can write:

$$\begin{aligned}\sin(sl + m\gamma)\cos i\varphi\cos i'\varphi' &= \sum_{p,p'}\{\eta\sin[(b_1 + p)\varphi + p'\psi + B] -\\ &- \eta\sin[(b_2 - p)\varphi - p'\psi - B] + \delta\sin[(b_1 - p)\varphi - p'\psi + B] -\\ &- \delta\sin[(b_2 + p)\varphi + p'\psi - B];\}\\ \cos(sl + m\gamma)\cos i\varphi\cos i'\varphi' &= \sum_{p,p'}\eta\cos[(b_1 + p)\varphi + p'\psi + B] +\\ &+ \eta\cos[(b_2 - p)\varphi - p'\psi - B] +\\ &\delta\cos[(b_1 - p)\varphi - p'\psi + B] + \delta\cos[(b_2 + p)\varphi + p'\psi - B],\end{aligned} \tag{10}$$

where for brevity we put:

$$\begin{gathered}\eta = S(m+i',\ p,\ p') + S(m-i',\ p,\ p');\\ \delta = C(m+i',\ p,\ p') + C(m-i',\ p,\ p');\\ b_1 = i+s-m;\ b_2 = i-s+m;\ B = mA' + sA.\end{gathered} \tag{11}$$

Formulae (10) solve the problem of the transformation of development (1) proceeding by four arguments into one proceeding by two arguments φ and ψ. Further, when performing the integration, we must remember that ψ is, according to (4), a definite function of φ.

According to the given four subscripts, s, m, i, i', we find the coefficient of the development of disturbing forces by four arguments. In passing to two arguments according to formula (10) we get the totality of the terms of developments in dependence on two new arbitrary subscripts p and p'. The values of numbers p and p' are found from the condition that the products $\eta R(s, m, i, i')$, $\delta R(s, m, i, i')$, etc. will satisfy the required accuracy in the development by small quantities e, e', j and α. Rejecting, as before, in the calculation of perturbing forces, the powers and products of small quantities α^{11}, $e\alpha^7$, $e^2\alpha^4$, $e^3\alpha^2$ and using the table of the values of functions S and C at different q, we can readily find the values p and p' for each system of four subscripts s, m, i, i'.

As an example we give the transformation of the following term of the development:

$$R(0,\ 4,\ 1,\ 0)\cos 4\gamma\cos\varphi = -\left(\frac{105}{8}e\alpha^3 + \frac{189}{16}e\alpha^5\right)\cos 4\gamma\cos\varphi =$$

$$= \frac{105}{4}ee'\alpha^3[\cos(3\psi + B) + \cos(2\varphi - 3\psi - B) - \cos(5\psi + B) -$$

$$-\cos(2\varphi + 5\psi + B)] + \frac{105}{4}ne^2\alpha^3[\cos(2\varphi + 4\psi + B) + \cos(2\varphi -$$

$$-4\psi - B)] - \left(\frac{105}{16}e\alpha^3 + \frac{189}{32}e\alpha^5\right)[\cos(\varphi + 4\psi + B) +$$

$$+\cos(\varphi - 4\psi - B)].$$

Using the above theory, V. S. Moškova and S. M. Varzar have obtained the development of the perturbing forces R, T, and Z, and the integral

$$2\int (Th^2 + Rhe\sin\varphi)\,d\varphi$$

by arguments φ and ψ.

Astronomical Institute
Leningrad

Received
13. V. 1935

REFERENCES

[1] B. V. Numerov, C. R. Acad. Sci. URSS, 1935, v. I, No 7—8, p. 457.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1935. Volume III (VIII), № 2 (62)

PHYSIQUE

INFLUENCE DE LA COLORATION PHOTOCHIMIQUE SUR LA LIMITE D'ÉTIREMENT ET DE SOLIDITÉ DES MONOCRISTAUX DU SEL DE ROCHE

Par M. PODAŠEVSKIJ

(Présenté par S. Wawilow, de l'Académie, le 13. V. 1935)

L'étude expérimentale de l'influence de la coloration photochimique sur les propriétés mécaniques des cristaux présente un intérêt considérable pour la connaissance des mécanismes de la déformation et de la coloration photochimique.

La seule méthode qui permette d'étudier sur un seul et même cristal l'influence de la coloration sur les propriétés mécaniques est celle mise en œuvre dans le présent travail, à savoir, la méthode optique de polarisation élaborée par Obreimow et Schubnikow (1). En même temps cette méthode se signale par une haute sensibilité et permet d'observer directement le développement des déformations plastiques.

On a examiné la déformation d'étirement unilatéral à l'aide de doubles suspensions à la Cardan, qui garantissait un degré considérable d'homogénéité de la déformation et l'absence de tout moment fléchissant. Des pièces de $5 \times 5 \times 70$ mm³ environ étaient taillées dans un bloc optiquement pur de sel gemme d'Artemovsk (Bakhmut) sans aucun traitement mécanique subséquant.

Parmi ces pièces l'on choisissait au calibrage de petites poutrelles dont les sections transversales en divers endroits ne différaient pas de plus de 0,2%. Ces échantillons étaient ensuite soumis pendant 3—4 jours au détrempage dans un four électrique à une température de 650° suivi d'une lente réfrigération. La qualité du détrempage était contrôlée par des méthodes optiques.

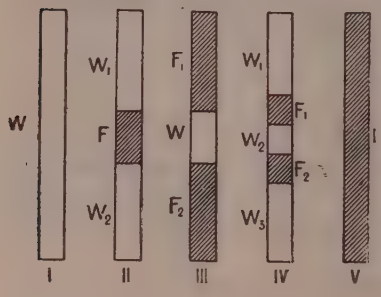
Les recherches portaient sur l'influence de la coloration par les rayons Rœntgen et les rayons ultra-violets. A l'effet d'une coloration partielle par les rayons Rœntgen les cristaux étaient éclairés à travers des diaphragmes de plomb appropriés de 8 mm d'épaisseur. La figure montre différentes

variantes de coloration, les hachures indiquant les parties colorées. La rœntgenisation se faisait avec 180 kV, 4 mA pendant 20 minutes, à une distance de 20 cm de l'anticathode.

La coloration par des rayons ultra-violets s'effectuait à travers une lamelle de quartz par une puissante décharge à étincelles entre électrodes d'aluminium. Le cristal était placé à 15 mm de l'étincelle.

Les cristaux traités d'après l'un des schémas expérimentaux indiqués sur la figure 1 étaient fixés dans des suspensions à la Cardan. La charge provenait d'un appareil hydrostatique permettant de charger et de décharger le cristal avec la vitesse voulue.

La partie optique de l'installation pour les observations en lumière parallèle consistait en deux grands nicols (ouverture effective ⌀ 30 mm). Une lampe de projection de 1000 W servait comme source de lumière. Les observations étaient exécutées tant visuellement que photographiquement à l'aide d'un appareil à film de cinéma pour épreuves de séries.



Afin d'éviter une décoloration photochimique on se servait d'un filtre à lumière rouge. Toute la partie optique de l'installation était montée sur un banc d'optique spécial sur un palier à billes et pouvait tourner décrivant jusqu'à 90° autour du cristal immobile fixé sur les Cardans. Pareil dispositif était indispensable vu l'incertitude de savoir vers quelles facettes du cristal se dirigerait le glissement, la limite d'étirement une fois franchie.

La vitesse du chargement était de 0.5—0.7 g/mm² par seconde. Des expériences sur des cristaux colorés d'après le schéma II, c'est-à-dire lorsque seule la partie moyenne du cristal d'une longueur de 10 mm était éclairée, montrèrent que des rayures de glissement dans la direction des surfaces d'un dodécaèdre rhombique (110) apparaissent à peu près simultanément rien que dans les parties non colorées W_1 et W_2. En augmentant la charge on observe un accroissement considérable du nombre de rayures dans ces parties, atteignant jusqu'à plusieurs dizaines par 1 mm, tandis que dans la zone colorée les rayures manquent totalement. Tous les cristaux de ce type, pour une charge suffisante, se rompent dans l'une des parties non colorées, présentant un manque total de glissements dans la partie colorée P.

Ensuite furent étudiés des cristaux où la disposition des espaces colorés était l'inverse de celle que l'on vient de décrire, la partie centrale restant incolore et les bouts P_1 et P_2 étant colorés. A l'étirement de pareilles pièces, des glissements apparaissent seulement dans la partie moyenne W et font totalement défaut dans les parties colorées F_1 et F_2. Dans des cristaux rœntgenisés à travers une double fente d'après le schéma IV des glissements survenaient exclusivement dans les parties non colorées W_1, W_2, W_3. Ce

n'est que pour des charges importantes avoisinant la limite de solidité qu'on pouvait observer une pénétration partielle des rayures dans les zones rœntgenisées F_1, F_2.

Des expériences faites d'après les schémas II, III et IV ne permettent pas d'établir la mesure de la limite d'étirement et de solidité du sel coloré, vu que les rayures de glissement et la rupture étaient observées seulement sur les parties non colorées. Dans ce but d'autres expériences furent executées avec des cristaux régulièrement colorés d'après le schéma V et des cristaux de contrôle non colorés (schéma 1) taillés dans un même bloc de sel.

Ces expériences démontrèrent que les cristaux régulièrement colorés présentent un rehaussement considérable de la limite d'étirement et de solidité. La table 1 résume les résultats de ces expériences.

	Moyenne de la limite d'étirement S en g/mm²	Moyenne de la solidité Z en g/mm²	Remarques
Cristaux non rœntgenisés	83.6	159.8	Moyenne de 16 expériences
Cristaux rœntgenisés	213.4	280.4	Moyenne de 11 expériences
Rehaussement en %	143.3	75.6	

Pour savoir si la consolidation observée ici est spéciale aux rayons Rœntgen et si elle ne tient pas uniquement à la présence de la coloration photochimique, indépendamment du genre de radiation qui la provoque, on fit des expériences d'après le schéma II sur des cristaux colorés aux rayons ultra-violets. Ces expériences donnèrent un effet tout-à-fait identique pour les deux genres de radiation.

Enfin, l'on rechercha si le rehaussement des caractéristiques mécaniques observé pour la coloration photochimique se rattache directement à la présence de la coloration jaune visible.

A cet effet les cristaux colorés d'après le schéma II étaient chargés de manière à provoquer une quantité considérable de glissements dans la partie supérieure W_1 et dans la partie inférieure W_2.

Dès que des observations continuées pendant de longues heures eurent donné la conviction que de nouvelles rayures de glissement n'apparaissaient pas pour la charge constante et que dans la partie colorée F il n'y avait pas un seul glissement, le cristal était exposé à un éclairement intense en lumière blanche. Une décoloration photochimique totale survenait en 30 minutes. Ces expériences montrèrent que dans la partie décolorée les rayures de glissement n'apparaissaient pas, c'est à dire que l'action consolidante de la coloration photochimique se maintenait encore après la décoloration photochimique. Même une augmentation ultérieure de la charge poussée jusqu'à la rupture ne provoque pas chez ces cristaux de formation de rayure de glissement dans la zone décolorée.

Les données expérimentales par nous obtenues ne sont pas suffisantes pour construire une théorie des phénomènes décrits ici. Ces recherches sont encore à développer. À titre d'hypothèse ouvrière, qui puisse expliquer les phénomènes de consolidation après la coloration photochimique, on peut admettre la présence dans de tels cristaux de particules présentant un degré de dispersion moindre que celui du sodium atomisé auquel on attribue généralement la coloration photochimique jaune.

De pareilles particules ultra-microscopiques se trouvant disposées sur les surfaces intérieures de glissement même en concentration minime, pourraient provoquer un rehaussement marqué de la limite d'étirement et de solidité.

Ainsi, par exemple, les expériences de Metag (2) ont démontré qu'une addition de molécules étrangères aux cristaux synthétiques de NaCl, par exemple de $PbCl_2$ en une concentration de 4×10^{-6} mol., en altère visiblement les propriétés mécaniques.

On peut admettre que la coloration photochimique produit outre le dégagement d'atomes de Na, la formation de particules de plus grandes dimensions, qui jouent dans notre cas le rôle d'admixtion.

Cette supposition peut servir à expliquer le fait que la consolidation se maintient même après la décoloration photochimique du sel jaune. Ici, seuls les centres atomaires sont détruits par l'action photoélectrique. Une partie des centres atomaires peut en même temps, par suite d'une coagulation (3) photoélectrique, dégénérer en ultra-microns et de son côté contribuer encore à la consolidation du cristal.

Institut de Physique
de l'Université d'Odessa

Manuscrit reçu
le 13. V. 1935

LITTÉRATURE CITÉE

[1] I. W. Obreimow u. L. W. Schubnikow, ZS. f. Phys., **41**, 917, 1927.
[2] W. Metag, ZS. f. Phys., **78**, 363, 1932. [3] E. Rexer, Phys. ZS., **33**, 202, 1932.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1935. Volume III (VIII), № 2 (62)

PHYSIK

ÜBER DIE STREUUNG VON NEUTRONEN AN PROTONEN

Von M. BRONSTEIN

(Vorgelegt von P. Lasareff, Mitglied der Akademie, d. 2. V. 1935)

Die von E. Wigner (1) gegebene Theorie der Streuung von Neutronen an Protonen soll in einer Hinsicht ergänzt werden: E. Majorana (2) hat gezeigt, dass die Wechselwirkungsenergie eines Neutrons und eines Protons den Operator des Austausches der Ortskoordination dieser Teilchen als einen Faktor enthält. Dieser Umstand ist in der Wignerschen Theorie unberücksichtigt geblieben. Für den symmetrischen Teil der Streuung ist er, wie wir sehen werden, unwesentlich; nur die kleinen unsymmetrischen Glieder, welche die Abweichungen der gestreuten Neutronenwelle im Schwerpunktsbezugssystem von der Symmetrie hervorrufen, erfahren infolge der Einführung des Austauschfaktors eine Veränderung.

Die Schrödingergleichung der relativen Bewegung eines Neutrons in bezug auf ein Proton lautet bekanntlich

$$\left(\frac{h^2}{M}\Delta + E'\right)\varphi(x, y, z) = V(r)\,\varphi(-x, -y, -z), \qquad (1)$$

wo $h = \frac{h}{2\pi}$, M = Masse eines Neutrons = Masse eines Protons, $E' = \frac{p^2}{M}$ = kinetische Energie des Systems vor und nach der Streuung in bezug auf den Schwerpunkt. $V(r)$ hat die Form einer Potentialmulde, ihre Tiefe ist von der Grössenordnung von 10^8 Elektron-Volt, ihr Radius von der Grössenordnung von 10^{-13} cm, wie C. G. Wick (3) gezeigt hat. H. Bethe und R. Peierls (4) integrieren diese Schrödingergleichung durch den Ansatz

$$\varphi(x, y, z,) = u(r)\,Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \qquad (2)$$

wo $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ eine Kugelfunktion ist; das gibt für $u(r)$ die Gleichung

$$\frac{d^2(ru)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r}u + \frac{1}{h^2}[p^2 - (-1)^l V(r)]ru = 0. \qquad (3)$$

Nehmen wir mit Wigner an, dass $V(r) = -V_0$, wenn $r < r_0$, und $V(r) = 0$, wenn $r > r_0$ ist; wir erhalten dann in üblicher Weise die Beziehung zwischen V_0, r_0 und der Bindungsenergie eines Diplons ε in der Form einer unendlichen Reihe

$$\frac{MV_0 r_0^2}{h^2} = \frac{\pi^2}{4} + \pi\xi + \left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right)\xi^2 + \ldots, \qquad (4)$$

wo $\xi = \frac{2d}{\pi r_0}$ $\left(d = \frac{h}{\sqrt{M\varepsilon}} = \text{«Diplonenradius»}\right.$; nach J. Chadwick ist $\varepsilon \approx$ $\approx 2 \cdot 10^6$ EV; das gibt $d \approx 4.5 \cdot 10^{-13}$ cm; mit $r_0 \approx 10^{-13}$ cm erhalten wir $\xi \approx \frac{1}{7}\Big)$. Nehmen wir die einfallende Neutronenwelle in der Form

$$e^{i\frac{p}{h}z} = \psi_0 + \psi_1 + \ldots + \psi_l + \ldots$$

an, mit

$$\psi_0 = \frac{h}{pr}\sin\left(\frac{pr}{h}\right),\ \psi_1 = -\frac{3ih^2}{p^2}\cos\vartheta\left(\frac{p}{hr}\cos\frac{pr}{h} - \frac{1}{r^2}\sin\frac{pr}{h}\right),$$

u.s.w.; wir sollen die Lösung der Gleichung (1) in der Form $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots$ suchen, wo jedes φ_l den Gleichungen (2) und (3) genügt. Dabei ist $\varphi_l = \psi_l + f_l$, wo $f_0 + f_1 + \ldots$ die gestreute Welle ist.

Für die Berechnung von f_0 ist der Austauschfaktor $(-1)^l$ unwesentlich, und wir erhalten mit Wigner

$$f_0 = \frac{b}{r}e^{ip(r-r_0)/h} \text{ mit } b = -\frac{h}{p}\frac{\omega r_0 \operatorname{ctg}(\omega r_0)\frac{\sin\zeta}{\zeta} - \cos\zeta}{\frac{\omega r_0}{\zeta}\operatorname{ctg}(\omega r_0) - i}$$

$\Big($ hier ist $\omega = \frac{\sqrt{p^2 + MV_0}}{h}$, $\zeta = \frac{pr_0}{h}\Big)$. ξ und ζ sind beide klein; von ihrer relativen Grösse hängt die Form des bequemen angenäherten Ausdrucks für b ab. Wenn $\zeta \lesssim \xi^2$ ist [langsame Neutronen mit der de Broglieschen Wellenlänge $\gtrsim \frac{d^2}{r_0}$, Energie $\lesssim 2\varepsilon\left(\frac{r_0}{d}\right)^2 \approx 2 \cdot 10^5$ EV] so haben wir

$$b = -\frac{h}{\sqrt{M\varepsilon}} - \frac{r_0}{2} + i\frac{hp}{M\varepsilon} + \ldots,$$

d.h. der Stossradius ist dem Diplonendurchmesser gleich. Wenn aber $\zeta \approx \xi$ (schnellere Neutronen, de Broglieschе Wellenlänge $\approx d$, Energie $\approx 2\varepsilon \approx$ $\approx 4 \cdot 10^6$ EV), so haben wir

$$b = -\frac{h}{p}\frac{1}{i + \frac{\sqrt{M\varepsilon}}{p}} - \frac{r_0}{2} + \ldots$$

Wenn $\zeta \approx \xi^{\frac{1}{2}}$ (de Broglieschе Wellenlänge $\approx \sqrt{dr_0}$, Energie $\frac{2p^2}{M} \approx$ $\approx 2\frac{d}{r_0}\varepsilon \approx 1.8 \cdot 10^7$ EV), SO erhalten wir $b = -\frac{h}{ip} - \frac{r_0}{2} + \ldots,$

d.h. der Stossradius ist durch die de Broglieschе Wellenlänge des einfallenden Neutrons bestimmt. Vernachlässigen wir den unsymmetrischen Teil $f_1 + f_2 + \ldots$ der gestreuten Welle, so erhalten wir die Wignersche Formel für den Streuungsquerschnitt

$$\sigma = \frac{4\pi d^2\left(1 + \frac{r_0}{d}\right)}{1 + \frac{E}{2\varepsilon}} = \frac{2.75 \cdot 10^{-24}\,\text{cm}^2}{1 + \frac{E}{2\varepsilon}} \qquad (5)$$

(E — kinetische Energie des Neutrons in bezug auf das ruhende Proton).

Andere Resultate als Wigner erhalten wir bei der Berechnung von f_1. Die P-Welle φ_1 ist von der Form

$$\varphi_1 = \cos\vartheta \,.\, u,$$

wo $u\,(r)$ den Gleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dr^2}(ru) - \frac{2}{r}\,u - \frac{MV_0 - p^2}{\hbar^2}\,ru = 0, \qquad (r < r_0) \\ &\frac{d^2}{dr^2}(ru) - \frac{2}{r}\,u + \frac{p^2}{\hbar^2}\,ru = 0 \qquad\qquad (r > r_0). \end{aligned} \tag{6}$$

genügt. Das allgemeine Integral im Gebiet $r < r_0$ ist

$$ru = c_1\left[e^{-\alpha r} + \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha r}\right] + c_2\left[e^{\alpha r} - \frac{e^{\alpha r}}{\alpha r}\right],$$

mit $\alpha = \frac{\sqrt{MV_0 - p^2}}{\hbar}$. Im Koordinatenanfang muss ru endlich sein, und das gibt $c_1 = c_2$. Wir erhalten $u = \frac{c}{r}\left(e^{\alpha r} + e^{-\alpha r} - \frac{e^{\alpha r} - e^{-\alpha r}}{\alpha r}\right)$. $\qquad (r < r_0)$

In der Nähe von $r = r_0$ haben wir $u = \frac{c}{r}\left(e^{\alpha r} - \frac{e^{\alpha r}}{\alpha r}\right)$ (denn $e^{-\alpha r_0} \ll e^{\alpha r_0}$).

Das allgemeine Integral im Gebiet $r > r_0$ nehmen wir an in der Form:

$$ru = a\left(\cos\frac{pr}{\hbar} - \frac{\sin\frac{pr}{\hbar}}{\frac{pr}{\hbar}}\right) + b'\left(e^{i\frac{p}{\hbar}(r-r_0)} + i\frac{e^{i\frac{p}{\hbar}(r-r_0)}}{\frac{p}{\hbar}r}\right).$$

Mit früheren Bezeichnung $\zeta = \frac{pr_0}{\hbar}$ erhalten wir Stetigkeitsbedingungen

$$a\left(\cos\zeta - \frac{\sin\zeta}{\zeta}\right) + b'\left(1 + \frac{i}{\zeta}\right) = ce^{\alpha r_0}\left(1 - \frac{1}{\alpha r_0}\right),$$

$$a\left(-\sin\zeta - \frac{\cos\zeta}{\zeta} + \frac{\sin\zeta}{\zeta^2}\right) + b'\left(i - \frac{1}{\zeta} - \frac{i}{\zeta^2}\right) = \frac{1}{\zeta}\,ce^{\alpha r_0}\left(\alpha r_0 - 1 + \frac{1}{\alpha r_0}\right).$$

Setzen wir nach (4) annäherungsweise $\alpha r_0 = \frac{\pi}{2}$, $\cos\zeta = 1 - \frac{1}{2}\zeta^2$, $\frac{\sin\zeta}{\zeta} = 1 - \frac{1}{6}\zeta^2$, so erhalten wir durch Eliminieren von c

$$b' = ia\,\zeta^3\left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} - \frac{1}{3}\right) = -0\,.\,10\,ia\,\zeta^3.$$

Mit $a = \frac{3\hbar}{pi}$ erhalten wir die gestreute P-Welle in der Form

$$f_1 = \frac{b'}{r}\,e^{i\frac{p}{\hbar}(r-r_0)}\cos\vartheta \quad \left(\text{wenn } r \gg \frac{\hbar}{p}\right), \quad \text{wo } b' = -0.30\,\frac{p^2}{\hbar^2}\,r_0^3 \text{ ist.}$$

Für die Streuungsintensität gibt das

$$I = \frac{\hbar^2 p^2}{(M\varepsilon + p^2)^2} + \left(\frac{\hbar\sqrt{M\varepsilon}}{M\varepsilon + p^2} + 0.30\,\frac{p^2}{\hbar^2}\,r_0^3\cos\vartheta\right)^2,$$

d. h. eine geringe Vorwärtsstreuung mit der Intensität

$$I' = 0.60\,\frac{\frac{r_0^3}{d}\cos\vartheta}{1 + \frac{E}{2\varepsilon}} = \frac{1.3 \cdot 10^{-27}\,\text{cm}^2}{1 + \frac{E}{2\varepsilon}}\cos\vartheta. \tag{7}$$

Es wäre sehr schwierig eine so geringe Richtungsabhängigkeit experimentell ausfindig zu machen.

Im Falle der gewöhnlichen (nicht Austausch-) Wechselwirkung zwischen Neutron und Proton hat man für $u = \frac{\chi_1}{\cos\vartheta}$ statt (6) die Gleichungen

$$\frac{d^2}{dr^2}(ru) - \frac{2}{r}u + \frac{MV_0 + p^2}{\hbar^2} ru = 0, \qquad (r < r_0)$$

$$\frac{d^2}{dr^2}(ru) - \frac{2}{r}u + \frac{p^2}{\hbar^2} ru = 0. \qquad (r > r_0)$$

Die Bedingung der Endlichkeit von ru für $r = 0$ gibt

$$ru = c\left(\cos\omega r - \frac{\sin\omega r}{\omega r}\right). \qquad (r < r_0)$$

Die Stetigkeitsbedingungen sind nun $c\left(\cos\omega r_0 - \frac{\sin\omega r_0}{\omega r_0}\right) =$

$$= a\left(\cos\zeta - \frac{\sin\zeta}{\zeta}\right) + b'\left(1 + \frac{i}{\zeta}\right); \quad \omega r_0 \frac{c}{\zeta}\left(-\sin\omega r_0 - \frac{\cos\omega r_0}{\omega r_0} + \frac{\sin\omega r_0}{(\omega r_0)^2}\right) =$$

$$= a\left(-\sin\zeta - \frac{\cos\zeta}{\zeta} + \frac{\sin\zeta}{\zeta^2}\right) + b'\left(i - \frac{1}{\zeta} - \frac{i}{\zeta^2}\right).$$

Mit $a = \frac{3\hbar}{pi}$ erhalten wir daraus

$$b' = ia\zeta^3\left(\frac{4}{\pi^2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\hbar}{p}\zeta^3\left(\frac{12}{\pi^2} - 1\right) = 0.21\frac{p^2}{\hbar^2} r_0^3,$$

und das führt zu einer kleinen Rückwärtsstreuung von der Grössenordnung von $I' = -0.42 \cos\vartheta \frac{r_0^3}{d}\left(1 + \frac{E}{2\varepsilon}\right)^{-1}$. (8)

[Infolge eines Rechenfehlers hat Wigner in dem hier betrachteten Fall der gewöhnlichen Wechselwirkung den Wert $b' = i \cdot 0.21 \frac{p}{\hbar} r_0^2$ und somit eine Vorwärtsstreuung erhalten, und zwar eine grössere als (8).]

Nun bemerken wir, dass das Hauptglied von (5), nämlich $4\pi d^2\left(1 + \frac{E}{2\varepsilon}\right)^{-1}$, von der genauen Form der Potentialmulde und von den genauen Werten von V_0 und r_0 ganz unabhängig ist, wenn nur $r_0 \ll d$, was sehr plausibel ist. Die experimentell gefundenen Werte von σ für die Streuung sehr langsamer Neutronen in Wasserstoff sind grösser als (5). Die Ursachen dieser Diskrepanz sind ganz unklar.

„Anmerkung bei der Korrektur. In einer inzwischen erschienenen Arbeit (5) gelangen auch Bethe und Peierls zu ähnlichen Resultaten. Ausserdem zeigen sie aus qualitativen Betrachtungen, dass bei Energien $\sim \sqrt{V_0\varepsilon}$ die Asymetrie verschwindet, um bei noch grösseren Energien ihr Vorzeichen zu ändern.

Physikalisches Institut
der Universität Leningrad.

Eingegangen
d. 2. V. 1935.

LITERATUR

[1] E. Wigner, ZS. f. Phys., **83**, 253, 1933. [2] E. Majorana, ZS. f. Phys., **82**, 137, 1932. W. Heisenberg. Rapports du Congrès Solvay, 1933. [3] C. G. Wick, Nuovo Cimento, **11**, 227, 1934; ZS. f. Phys., **84**, 799, 1934. [4] H. Bethe and R. Peierls, Proc. Roy. Soc., A. **148**, 146, 1935. [5] H. Bethe and R. Peierls, Proc. Roy. Soc., **149**, 176, 1935.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1935. Volume III (VIII), № 2 (62)

CHEMISTRY

THE DIMERIZATION OF BUTADIENE-1,3

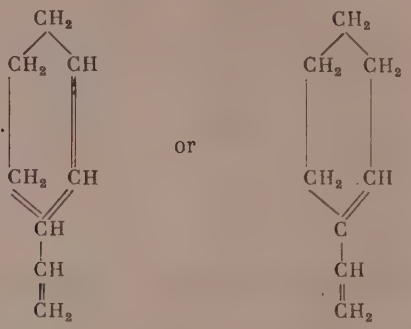
By S. LEBEDEV, Member of the Academy

and S. SERGJENKO.

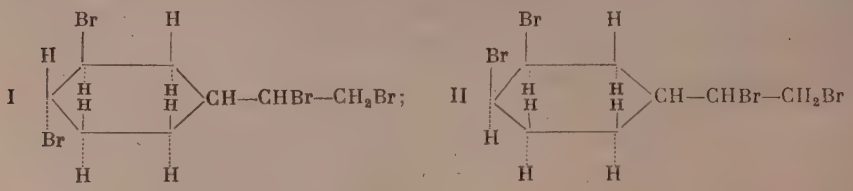
The problem of the dimerization of butadiene-1,3 and its homologues is of great importance, since its solution may provide an explanation for the probable mechanism of rubber synthesis. If the dimerisation scheme proposed by S. Lebedev proved to be correct, this would be a confirmation of the mechanism of polymerization reactions developed by Lebedev (1) and Staudinger (2). These authors suggested that the combination of monomeric butadiene molecules is accompanied by the rupture of double bonds without migration of hydrogen atoms. If, however, dimerization proceeds with the simultaneous migration of hydrogen atoms, we must accept the polymerization mechanism proposed by Ostromyslenskij (3) and Whitby (4). The experiments made by Lebedev (5), Aschan (6), Wagner-Jauregg (7), and Whitby and Crozier (8) on the polymerization of isoprene and diisopropenyl have fully corroborated the scheme adopted by Lebedev, but the dimerization mechanism of butadiene remains an open question. The investigation of this simplest of hydrocarbons containing conjugated double bonds was of special interest.

The present paper deals with that problem. The chief difficulty experienced during this investigation consisted in the lack of a sufficient amount of initial material. However, we succeeded in overcoming this difficulty. It has been shown that the dimeric product obtained by thermal polymerization of rectified butadiene, produced now on a large scale according to the method of Lebedev (9), is identical with the dimerization product obtained by thermal polymerization of pure butadiene. By fractionating the dimer of butadiene we could isolate a cut boiling at a somewhat higher temperature (10—15°) than the main product. The constants of this compound show that it represents a monocyclic idimerzation product—an isomer of

ethenyl-1-cyclohexene-3. Its structure has not been confirmed experimentally, but the results obtained permit to assume that it can be represented by one of the following schemes:



The main fraction was identified as the ethenyl-1-cyclohexene-3 prepared previously by Lebedev. By the bromination of this product we obtained two crystalline tetrabromides differing in melting point, solubility, and the difficulty of regenerating hydrocarbons from these bromides. It seems possible to account for this difference by assuming the existence of cis-trans-isomerism. We consider the bromide with a higher melting point (101.5—102.5°) to be the trans-form (I), that with a lower one (74—75°) the cis-form (II):



The first tetrabromide forms well-developed large crystals, which could be characterized by the usual crystallographic methods. The second tetrabromide did not form such crystals. The hydrocarbons regenerated from both tetrabromides proved identical with the original dimeric product and with ethenyl-1-cyclohexene-3 (see the table).

The main product of the dimerization of butadiene (ethenyl-1-cyclohexene-3), as well as its isomer, show no tendency to further polymerization. Consequently, the results obtained by the authors concerning the dimer of butadiene are in perfect agreement with previous investigation on isoprene and diisopropenyl. It may be asserted that the dimerization of butadiene, as well as that of isoprene and diisopropenyl, proceeds according to the scheme proposed by Lebedev. No formation of open-chain dimers has been observed.

Comparison of the properties of the hydrocarbons regenerated from their bromides with the properties of the original dimer

	Hydrocarbon from the bromide with m. p. 101.5—102.5°	Hydrocarbon from the bromide with m. p. 74—75°	Original dimer	Calculated for ethenyl-1-cyclohexene-3	Lebedev's ethenyl-1-cyclohexene-3
Boiling point . .	130°/773 mm	130°/773 mm	129.5—130.5°. at 773 mm		65—66° at 100 mm
	50—51° at 50 mm	50—50.5° at 50 mm	66—67° at 100 mm		129.5—130.5° at 760 mm
Analysis { p. c. C	88.72	88.69	88.69	88.79	88.74
Analysis { p. c. H	11.24	11.12	11.16	11.11	11.16
Specific gravity D_4^0	0.8471	0.8473	0.8469		0.8484
Specific gravity D_4^{20}	0.8310	0.8309	0.8302		0.8320
Molecular refraction n_D^{20}	1.46385	1.46375	1.46395		1.46529
Molecular refraction MR_D	35.86	35.88	35.88	36.01	35.90
Parachor $P = \frac{M\gamma^{1/4}}{D-d}$	296.1	296.1	296.5	296.1	—
Amount of the added H_2 in per cent of amount calculated for $\equiv$	98.15	97.9	99.15	100	—

Conclusions

1. It has been established that no open-chain dimers form during the thermal polymerization of butadiene-1,3.

2. The only primary product of the dimeryzation of butadiene-1,3 is a monocyclic hydrocarbon that has been identified with ethenyl-1-cyclohexene-3.

3. A monocyclic hydrocarbon isomeric with ethenyl-1-cyclohexene-3 has been obtained.

4. Both ethenyl-1-cyclohexene-3 and its isomeric product do not tend to further polymerization if the reaction conditions are not favourable for isomerization or other secondary reactions.

5. We have obtained two crystalline tetrabromides of ethenyl-1-cyclohexene-3, which are probably cis-trans-isomers.

Chemical Association
of the Academy of Sciences of the USSR
Leningrad

Received
11. V. 1935

REFERENCES

[1] Zhurnal Russkogo Fiziko-Khimicheskogo Obshchestva, **41,** 1818 (1910); **42,** 949 (1910). [2] Helvetica Chimica Acta, **5,** 785 (1922). [3] Zhurnal Russkogo Fiziko-Khimicheskogo Obshchestva, **47,** 1928—31 and 1937—1941 (1915). [4] G. Whitby, Trans. Inst. Rubber Industry, **5,** 184 (1929—30); J. Am. Chem. Soc., **50,** 1160 (1928). [5] Zhurnal Russkogo Fisiko-Khimicheskogo Obshchestva, **43,** 1123 (1911). [6] Liebig's Annalen der Chemie, **461,** 1—26 (1928). [7] Ibidem, **488,** 176 (1931). [8] Canadian Journal of Research, **6,** 203 (1932). [9] Zhurnal Obshchei Khimii, **3,** № 6, 698 (1933).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1935. Volume III (VIII), № 2 (62)

BIOCHEMISTRY

CONTRIBUTION TO THE METHODICS OF THE DETERMINATION OF FERMENTS

By B. RUBIN and L. NAUMOVA

(*Communicated by A. Richter, Member of the Academy, 5. VI. 1935*)

In the course of laboratory work in the biochemistry of vegetables we became convinced of the absence of a well-grounded methodics of the determination of ferments and of the necessity of working out a number of methodological questions in the analysis of ferments. Most investigations in this field, it would seem, are chiefly an elucidation of the optimum conditions for the action of ferments (temperature, acidity of the medium, duration of action, etc.). Methods of obtaining a solution of ferments have been, up to this time, least of all studied.

It is known from the works of Palladin and Popoff, Synievski, Bodnár and Villányi, Oparin and Bach, and others, that in certain objects—especially those rich in albumens—it is often heard to establish the presence of any detectable «quantity» of amylase whatever. Meanwhile, if by one or another means we break the connection between the ferment and the protoplasm (for example, by autolysis), greater «quantities» of ferments can be discovered. Palladin, and afterwards Oparin and Riskina, showed that if the amylase be extracted from leaves by a certain quantity of water and if the precipitate be centrifuged off and again treated with water, there is obtained in this second treatment a considerable «quantity» of ferments. On the basis of his latest investigations, Oparin arrives at the conclusion that there are two forms of ferment in the cell—free active ferment and that which is absorbed by intracellular surfaces or inactive. By the usual methods only that part of the ferment that exists in micro-heterogenous state can be converted into solution.

It is apparent, from what has been said, that a determination of the activity of a ferment *in witro* depends, first of all, on the possibility of completely extracting the ferment.

In this present communication, the authors will briefly set forth their investigations on the means of extracting ferments and the influence of

these means on the activity of ferments, as likewise on the influence of acidity of medium on the activity of ferments.

In the determination of the activity of ferments, great importance must be attributed to the relation between the test portion and the solvent. We give the data of our experiments with cabbage and tomatoes as an example:

Table 1

Activity of Ferment under Different Relations between Test Portion and Solvent

Dilution of suspensions	Amylase in mg of maltose to each g of dry substance		Catalase per C. C. to each g of dry substance
	Cabbage	Tomato	Cabbage
10/100	886	—	778
10/200	1 516	24	1 312
10/300	1 885	—	1 338
10/500	2 800	34	1 379
10/1000	4 469	58	1 310
10/2000	8 801	103	—
10/3000	12 890	143	—
10/5000	10 720	160	—

It is evident from this table that amylase reacts with exceptional sensitiveness to the relation of test portion to solvent.

In the course of a long series of variants of dilution, we invariably ascertained a direct proportion between degree of dilution and activity of amylase. There is no doubt that the increase of activity of amylase that was noted is due to the ferment that is found in the cell in inactive, absorbed state. Increase of dilution breaks up the equilibrium between the micro- and macroheterogenous portions of the ferment and is, in its effect, equivalent to successive, reiterated extractions of amylase, as was carried out by Oparin and Riskina.

It is also evident from this table that dilution exercises an influence also on the activity of catalase, although not to so high a degree.

In order to effect a more complete extraction of the ferment into the solution, the method of triturating the test portion with sand is ordinarily employed.

For catalase, this method of comminution of the test portion is considered essential.

In connection with the phenomenon of absorption of ferments, it appeared important to us to test the influence of sand in this respect, too. This investigation was conducted only for catalase. The results are shown in Table 2.

Mirbeck's conclusion that the use of sand is necessary did not find confimation in our experiments. The figures show that trituration of the samples with sand, far from increasing the activity of the catalase, quite noticeably diminished it.

Table 2

	Trituration without sand	Trituration with sand (percentages of the preceding figures)
Onion «Msterski» (leaves)	100	89.3
Radish from Moscow hotbeds (leaves)	100	93.2
Erfurt radish (leaves)	100	86.0
Graivoron radish (leaves)	100	88.1

A no less important factor in the determination of ferments is the libe ration of the solution from particles suspended in it. For this purpose, the processes of filtration or of centrifuging are usually apllied. Some of our results of experimentation in this direction are shown in Table 3.

Table 3

Activity of Catalase in Suspension, Filtrate, and Fugate

	Suspension	Filtrate	Fugate
Onion «Msterski» (leaves)	895	198.4	600
Onion «Rostovski» (bulb)	133.5	51.4	—
Onion «Msterski» (bulb)	123.9	—	79.6
Onion «Kutukovski» (leaves)	667.4	45.5	330.3
Cabbage «Number» 1 (of marketable maturity)	1095.3	—	968.1
Cabbage «Amager» (in stage of first leaves)	489.1	448.3	464.4
Tomato «Pierretta» (leaves)	537.9	—	337.1
Tomato «Sparks Erliana»	80.2	46.4	72.3
Radish from Moscow hotbeds	975.5	443.6	770.0

These figures show that filtration of a solution of catalase through Shleicher's and Shull's No 598 paper causes a sharp decrease in the activity of the ferment, the amount of «absorbed» ferment in different cultures greatly fluctuating. The reason of the fluctuation must apparently be referred to the chemical constitution of the solution analysed.

On the basis of the findings of a number of authors—Bach, Oparin, Heinike, Mirbeck, and others—we know that an acid reaction of the medium leads to a decomposition of catalase. In order to neutralize the acids, when extracting catalase, the addition of chalk is recommended. According to the data of Mirbeck and Heinike, the reaction of the medium at the moment of crushing the cells is of decisive importance.

In our experiments, the influence of chalk, or its substitute, was studied both when introduced before the trituration of the test portion and when introduced after. The data are shown in Table 4.

From these data it is evident that in comparison with the control experiments, in which the natural acidity of the comminuted tissues was

Table 4

	Amager Cabbage		Msterski Onion		Sparks Tomato	
	pH	Activity of catalase in C. C. 0.1 per 1 g of dry substance	pH	Activity of ferment per 1 g of dry substance	pH	Activity of catalase per 1 g of dry substance
Sample triturated with chalk present	6.89	702.6	7.58	1491.6	7.47	71.0
Sample triturated with chalk and sand present	6.95	658.0	7.55	1474.5	7.37	66.8
Chalk introduced into flask together with already comminuted mass .	6.85	674.2	7.28	1425.2	6.44	26.9
Sample triturated with phosphate buffer in which it was infused	6.78	633.4	—	1387.8	—	20.6
Sample triturated with sand and without chalk . . .	6.15	593.1	6.15	1299.7	4.55	10.2
Control without chalk and sand	6.07	664.0	5.78	1361.0	4.45	10.2
Extraction conducted in 2 per cent solution of peptone	—	—	—	—	4.74	0.0

conserved, a more active ferment could be obtained in all cases. The higher the acidity of the tissues themselves and, consequently, the lower the pH the stronger was the influence of the chalk. For tomate fruits, the acidity of which rises to pH 4,5, the addition of chalk increases the activity of the catalase 7 times.

In all cases in which chalk was added to the test portion before its comminution, the ferment proved most active.

Thus, diversity of chemical composition in the objects analysed dictates the necessity of a corresponding diversity in the methods of determining ferments.

Laboratory of Biochemistry
Institute of Vegetable Crops
Moscow

Received
5. VI. 1935

REFERENCES

[1] Palladin u. Popoff, Bioch. ZS., 1922, 128. [2] Syniewski, Bioch. ZS., 1925, 158. [3] Bodnár u. Villányi, Bioch. ZS., 1926, 169. [4] Oparin u. Bach, Bioch. ZS., 1924, 148. [5] Oparin and Riskina, Sbornik rabot biokh. sektora, TZINS'a, 1933, I. [6] Oparin, Manskaja, Glasunow, Bioch. ZS., 1934, 272. [7] Oparin u. Kurssanow, Bioch. ZS., 1929, 209. [8] K. Myrback u. S. Myrback, Wochenschr. f. Brauerei, 1932, 49. [9] Nikolajev, Raboty Instituta khlebopekarnoi promyshlennosti, 1933, 5.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1935. Volume III (VIII), № 2 (62)

PETROGRAPHY

MEASUREMENT OF THE DIELECTRIC CONSTANT AND THE SPECIFIC RESISTANCE OF ROCKS

By B. Dostovalov

(*Communicated by F. Loevinson-Lessing, Member of the Academy, 20. V. 1935*)

The measurement of the physical constants of rocks is quite necessary for methods of geophysical prospecting, which have considerably developed during last years. On the other hand, one should look for a connection existing between the physical constants of rocks and their structure, their mineralogical and chemical constitution, in order to arrive at conclusions which may be of value for petrography and petrology. These considerations induced the Petrographical Institute of the Academy of Sciences to institute an investigation of the physical constants of rocks and, in the first place, of the dielectric constant ε and the specific resistance ρ

Method of Measurements

The method of measurements was suggested by Prof. A. A. Petrovskij. The apparatus was designed by R. I. Skariatin. Fig. 1. shows that ρ, ε-apparatus consists of push-pull valve-generator, feeding device, and measuring circuit inductively coupled with the generator circuit.

The generator produces five different waves from $\lambda_1 \approx$ 156 m to $\lambda_5 \approx$ 500 m.

Variation of wave-length is obtained through a change in the capacity of the oscillating circuit of the generator.

The measuring circuit consists of coupling coils (L_{co}), sectionned coil of inductance ($L_{\partial o \delta.}$), indicator of current (thermocouple $T\Theta$ and galvanometer G), and measuring (C_{12}) and standard (C_{11}) condensers connected in parallel. The measurements were carried out as follows.

1. After the desired wave-length and proper intensity of coupling are set up, the measuring circuit is tuned into resonance with the generator circuit, and the values of the capacity C_1 of the standard condenser and current flow I_1 are put down.

2. Then the sample cut in the form of a rectangular plate is put into the measuring condenser. The capacity of C_{12} grows, and, for tuning into resonance, it is necessary to reduce the capacity of the standard condenser to the value C_2. At the same time, the new intensity of current I_2 is put down. The obtained values allow to perform the following calculations.

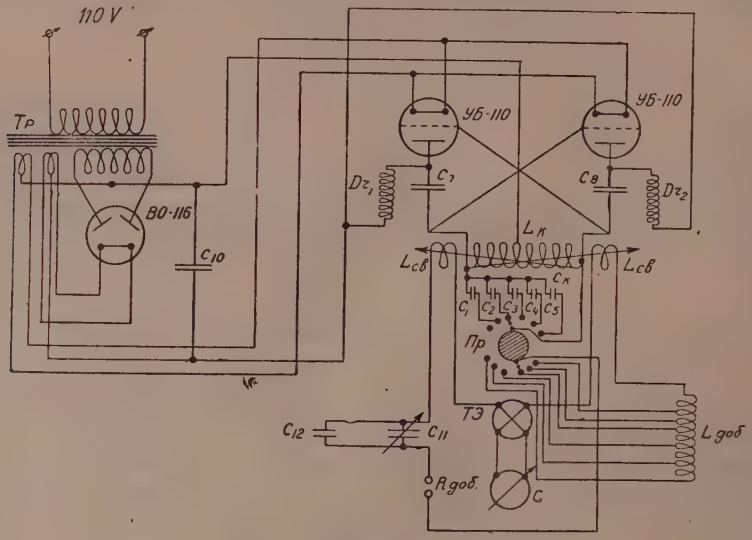


Fig. 1.

We obtain the change in effective capacity C due to the installment of the sample into the measuring condenser

$$C = C_1 - C_2 \qquad (1)$$

and the ratio of the strength of currents in the secondary circuit without the sample and with it

$$\Theta = \frac{I_1}{I_2}. \qquad (2)$$

Then we calculate the coefficient φ

$$\varphi = \frac{\Theta^2 - 1}{2 - \Theta^2} \qquad (3)$$

and find the variation of effective resistance effected by the sample

$$R_e = \varphi(R_2)_0. \qquad (4)$$

The value $(R_2)_0$ is the effective resistance of the secondary circuit at the same wave-length without the sample.

The results of these calculations enable us to obtain the values of ε and ρ as follows.

We calculate the capacities

$$C_0' = \frac{S'}{4\pi h'}, \qquad (5)$$

$$C_0'' = \frac{S'}{4\pi(h - h')}, \qquad (6)$$

S' being the area of the sample, h' its thickness, and h the distance between the plates of the measuring condenser.

Then we calculate the capacity $C' = \varepsilon C'_0$ according to the formula*

$$C' = \frac{C'_0 C''_0 + (C'_0 + C''_0)\, C''_0}{C''^2_0 - (C'_0 + C''_0) C} \qquad (7)$$

and obtain the dielectric constant

$$\varepsilon = \frac{C'}{C'_0} . \qquad (8)$$

To obtain the value of specific resistance, we calculate the resistance of the leak R' according to the formula*

$$R' = \frac{C''^2_0}{[C' C''_0 + (C + C''_0)\, C^{IV}]^2 \omega^2 R'_e} , \qquad (9)$$

C^{IV} being the capacity of the standard condenser when the sample is installed and the secondary circuit is tuned into resonance with the primary circuit, and ω being the angular velocity. Then we find the specific resistance ρ from the following formula

$$\rho = \frac{R' S'}{h'} . \qquad (10)$$

Results of Measurements

ε and ρ of about fifty samples of rocks were measured by this method. For some rocks, series of samples differing in texture and chemical composition were investigated. The wave-length during the experiments was $\lambda = 300$ m. The results are shown in the following table:

Name of rock	ε	ρ
Tuffs and tuff-lavas (Ani, Garnichai) . .	3.79— 4.5	$0.175 \cdot 10^6$—$10.1 \cdot 10^6$
Andesite-basalts (Aiger—Gel)	6.53—11.9	$0.23 \cdot 10^6$—$1.38 \cdot 10^6$
Nepheline-syenites (Kola peninsula) . . .	6.99—12.7	$0.217 \cdot 10^6$—$2.73 \cdot 10^6$
Foyaites (Ukraine, Kola peninsula) . . .	7.45—8.95	$0.269 \cdot 10^6$—$2.07 \cdot 10^6$
Urtites (Kola peninsula)	11.9—12.8	$0.508 \cdot 10^6$—$1.37 \cdot 10^6$
Dacites (Alages, Armenia)	6.80—8.16	$0.682 \cdot 10^6$—$1.9 \cdot 10^6$
Traps (Eastern Siberia)	18.9 —39.8	$0.054 \cdot 10^6$—$0.246 \cdot 10^6$
Obsidian	5.8	$16.7 \cdot 10^6$
Quartzite	6.63	$0.178 \cdot 10^6$
Marmorized limestone	15.2	$0.173 \cdot 10^6$

A comparison of ε and ρ values with the chemical composition of samples does not allow to draw any definite conclusion.

On the other hand, texture seems to exercise an influence upon the dielectric constant. We have established a reverse relation between the content

* The deduction of these formulae will be given in the Memoirs of the Petrographical Institute of the Academy of Sciences for 1934.

It is assumed that $m = \frac{\varepsilon \rho \omega}{4\pi} \gg 1$.

of glass and ε values for andesite-basalts and dacites. Both relations are given in Fig. 2. An accurate determination of glass content being difficult, the ground mass was calculated (glass and microlites), and curves were drawn on the basis of the percentage content of ground mass.

Should the content of pure glass be determined, the curve would be smoother, since a microscopic examination of fine sections shows that the content

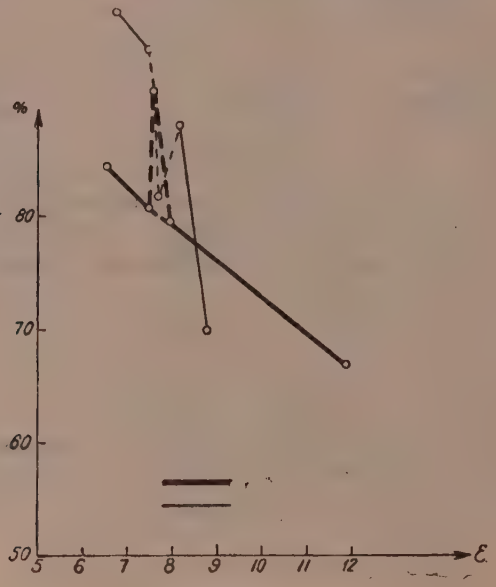


Fig. 2. Relation between ε values and the glass content for andesite-basalts and dacites.

of glass for the third points is less than for the second ones and more than for the fourth ones.

The samples were investigated dry. In further experiments, it is proposed to investigate the influence of water, which usually soaks the rock *in situ*, upon the physical constants, as well as that of temperature, load, and different admixtures.

Petrographical Institute
Academy of Sciences of the USSR
Moscow

Received
20. IV. 1935

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1935. Volume III (VIII), № 2 (62)

ZOOLOGY

OECOLOGICAL PARALLELS BETWEEN LAMPREYS AND *SALMONIDAE*

By L. BERG

Corresponding Member of the Academy

The lampreys (*Petromyzonidae*) and the *Salmonidae* belong to divisions of vertebrates that are very far apart from the standpoint of classification. The *Salmonidae* first appear in the Miocene, while the relatives of lampreys are known from the lower Palaeozoic.

Nevertheless, startling ressemblances are to be observed between lampreys and *Salmonidae* as regards their oecology. Let us compare, for instance, the habits of *Lampetra fluviatilis*, f. i. of our common Neva river-lamprey with those of the sea-trout (*Salmo trutta*), a species closely related to the salmon (*Salmo salar*).

Lake Forms. Both river-lamprey and sea-trout (and salmon) are migrating species: they inhabit the sea but return to fresh-water for breading. However, both lamprey and sea-trout (and salmon) may, instead of the sea, live in large fresh-water lakes: so we have in Lakes Ladoga and Onega lamprey, sea-trout and salmon which never migrate to salt-water and for whom these large lakes may be said to represent the sea.

Brook Forms. But the adaptation of lamprey and sea-trout to fresh-water life may go still further: they produce forms which never make any considerable migrations—either to salt water, or to large lakes, but breed in the same streams wherein they have lived during the earlier part of their life; such forms are termed brook-lamprey (*Lampetra planeri*) and brook-trout (*Salmon fario*). The distinguishing feature of these forms is their small size. Whereas the anadromous Neva lamprey (*Lampetra fluviatilis*) is, on the average, 31—34 cm. long, the brook form attains a length of only 10—16 cm.; correspondingly, the sea-trout attains in the basin of the Baltic sea a weight of 3 kg. and more, while the weight of the brook-trout is about 1 kg., usually under that, rarely above.

The geographical distribution of these dwarfed forms, the brook-lamprey and brook-trout, is most remarkable. Wherever there

exists the migratory form, *Lampetra fluviatilis* or *Salmo trutta*, there we also have the nonmigratory brook form—*Lampetra planeri* or *Salmo fario*. But both of the latter are also to be met with outside the areas of the present occurrence of the migratory forms. So the brook-trout inhabits the whole basin of the Mediterranean (in Europe, Africa, and Asia), while there exists no migratory sea-trout there at all at the present time (except the Black Sea). There are reasons to believe, however, that during the glacial epoch, when the temperature of the Mediterranean was lower, it was inhabited by *Salmo trutta*. Similarly, there are no migratory lampreys(*Lampetra fluviatilis*) in the basin of the river Po while the brook-form (*L. planeri*) does exist there.

As for the salmon (*Salmo salar*), it does not, as a rule, produce small non-migratory forms in rivers. In some lakes of North America and in one lake in South Norway the salmon has produced a dwarfed variety which never migrates to the sea. Moreover, salmon have been successfully propagated in Scotland and Denmark in ponds, where they breed in fresh water without descending to the sea and also without attaining large dimensions. Besides, the male parrs very often reach maturity in rivers on their 2nd, 3rd, or 4th year, being analogous to adult males of the brook-trout or brook-lamprey. Female salmon never become adult in their parr stage.

Duration of River-Life. Young sea-trout remain in rivers for a long time, from one to six years, usually from 2 to 4 years. The larvae of the river-lamprey or *Ammocoetes*, also live for a long time in rivers before transformation into the adult form, namely for 4—5 years.

Descending to the Sea. After having been transformed into the adult form, the young sea-trout (15—25 cm. long) and the young river-lamprey (9—15 cm.) descend to the sea. This usually occurs, in respect o both fishes, towards the end of spring or beginning of summer. By this time both *Lampetra fluviatilis* and *Salmo trutta* assume silvery dress.

Ascending from the Sea to the River. After having descended to the sea the young sea-trout and the river-lamprey grow rapidly. They return in rivers after having spent, as a rule, not less than a year in the sea. But what is remarkable, some sea-trout and some lampreys enter the rivers the same year they first migrated to the sea, either in summer, autumn, or winter, having thus spent only one summer or a little more, and sometimes less than one summer, in the sea. Such sea-trout are called whitlings in Scotland. Whitling attain an average length of about 25—35 cm., depending upon the river. Some, mainly the males, spawn the same winter (1), but breeding female whitlings are also to be met (2). The same phenomenon has been observed by me and M. M. Ivanova-Berg in the river-lamprey. On December 6, 1929, there were caught in the mouth of the river Kovash, emptying into the Finnish Gulf, a female of only $12^1/_2$ cm. with sharp teeth and well-developed eggs and a male of $17^1/_2$ cm. with sharp teeth and well-developed milt. These lampreys had, evidently after transformation, des

cended to the sea only in the spring of the same year (1929), and had already returned at the beginning of that winter, i. e. six months later, for breeding (which was to have occurred towards the end of spring, 1930).

Such small lampreys, corresponding in age to whitlings, enter the Neva in autum in large quantities. During October and November, 1930, M. M. Ivanova-Berg procured in the Neva delta 89 females 224 mm. long on the average and 86 males 226 mm. long on the average (3). I have named these small lampreys that have spent half a year or less in the sea, *L. fluviatilis* forma *praecox*, i. e. the early spawning form (4).

It should be remembered that lampreys, unlike the *Salmonidae*, breed but once in their life and then die, both males and females, whereas the sea-trout and the salmon spawn several times in their life; it is true that a considerable part of salmon (*Salmo salar*) dies after its first breeding, but this concerns the males mainly. The Pacific salmon of the genus *Oncorhynchus* (day-salmon, humpback salmon, blueback salmon, quinnat salmon, etc.) all die after their first spawning similarly to lampreys.

The salmon never returns in rivers as soon as the sea-trout does; it spends at least one winter in the sea. The salmon which has spent only one winter in the sea is termed grilse. The above-mentioned *praecox* form of *Lampetra fluviatilis* corresponds to whitling, and not to grilse, with the difference that whitling spawns the same winter, and the *praecox* lamprey in the beginning of the next summer (in the beginning or middle of June). The European species of *Salmo* breed, as is well known, in autumn and winter, whereas lampreys breed in the beginning of summer.

But besides the autumn run of *praecox* lampreys in the Neva, this form also ascends in spring, so on May 24, 1933, M. M. Ivanova-Berg obtained in the mouth of the Neva a breeding female $23^1/_2$ cm. long, on May 26 a breeding male $19^1/_2$ cm. long and on June 1, 1934, a spent female 22 cm. long. These lampreys had spent exactly a year in the sea, and they may be compared by their age (but not by the maturity of their gonads) with grilse of early run, and by the state of their gonads with spawning whitling. This small form (*preacox*) is to be met with not only in the Finnish Gulf but also in Lake Ladoga, whence it enters rivers for spawning. I have had in my hands *praecox* forms 20—24 cm. long from the river Volkhov, caught in October (5).

Both salmon and sea-trout have spring and winter races. The spring race enters rivers in summer and in the beginning of autumn and breeds the same autumn. The winter race ascends our Northern rivers in autumn with their gonads but slightly developed and breeds only a year later, spending all this time in the river and taking no food whatsoever (6). The same two forms can also be met with in the river-lamprey with corresponding modifications depending upon the difference in breeding seasons of lampreys and *Salmonidae*. The lamprey enters the Neva in autumn in large quantities, spends the winter there, and breeds in the middle of June of the next year. This is the winter form. In spring there is observed to occur another run of lamprey

to the Neva, namely of the spring race, which breeds towards the end of spring or the beginning of summer of the same year. It is noteworthy that single individuals of the winter race, whose run in the Neva is to be observed from the middle of August, commence to enter the river much earlier, in the beginning of June, when, among breeding lampreys, with atrophied intestine, blunt teeth, and strongly developed fins, we can meet lampreys with well-developed intestine, sharp teeth, low fins, and feebly developed gonads; these lampreys belong to the winter race. Similarly, in autumn, in the rivers of our North, there may be simultaneously observed both salmon and sea-trout with fully ripe gonads belonging to the spring race and winter salmon and sea-trout with feebly developed gonads. So the analogy with lampreys is complete (if allowance be made for the difference in dates of the breeding season).

The above-described oecological parallelism in vertebrates of such a different organization as lampreys and *Salmonidae* cannot but provoke our astonishment. Evidently, oecological peculiarities are comparatively quickly acquired by animals under the influence of environment. A conclusion of great importance as regards the problem of breeding new forms. It should be remembered that a local form never migrating to the sea has been easily bred from the migratory salmon in the ponds of Scotland, Denmark, and Poland.

Institute of Zoology
Academy of Sciences of the USSR
Leningrad

Received
18. V. 1935.

REFERENCES

[1] G. H. Nall, The Life of the Sea-Trout especially in Scottish Waters, London, 1930, Seeley, p. 239, also Table 4 on p. 314. [2] Ibid, p. 240—241. [3] M. M. Ivanova-Berg, Archiv f. Hydrobiologie, Bd. XXV, 1933. [4] L. S. Berg, Ann. Mus. Zool. Acad. Sci., XXXII, 1931, p. 88, 106.—L. S. Berg, Les poissons des eaux douces de l'URSS, I, 1932, p. 38 (in Russian). [5] L. S. Berg, ibid. II, 1932, p. 835. [6] L. S. Berg, Sommer- und Winterrassen bei den anadromen Fischen, Archiv für Naturgeschichte (im Druck).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1935. Volume III (VIII), № 2 (62)

ZOOLOGIE

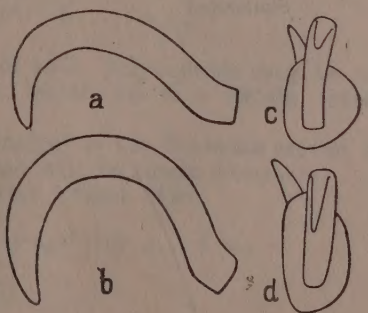
ÜBER EINE NEUE, IN SPEICHERN VORKOMMENDE MILBE

Von V. VOLOŠČUK (WOLOSCHUK)

(Vorgelegt von S. A. Zernov, Mitglied der Akademie, 18. V. 1935)

Die Milben der Gattung *Rhizoglyphus* (Fam. *Tyroglyphidae*) sind Kosmopoliten und wichtige Schädlinge verschiedener Kulturen. Die Arten: *R. echinopus* Fum. et Rob., *minor* Dement., *caucasicus* Dement., *crassipes* Haller u. a. sind polyphag; sie leben ausschliesslich auf Kosten der unterirdischen Teile und des Wurzelsystems der Pflanzen, und sind an Tulpen, Lilien, Hyacinthen, Zwiebeln, Knoblauch, Kartoffeln, Weinreben und Gräsern (?) festgestellt.

Bei der Untersuchung von Kornspeichern haben wir eine Milbe in grosser Menge festgestellt, die der typischen Form von *Rhizoglyphus echinopus* Fum. et Rob. nahesteht, sich aber etwas von ihr unterscheidet und von uns als var. *noginae* nov. abgetrennt wird.



a — *Rhizoglyphus echinopus*, Kralle; *b* — *Rh. echinopus* var. *noginae*, Kralle; *c* — *Rh. echinopus*, Tarsenspitze; *d* — *Rh. echinopus* var. *noginae*, Tarsenspitze.

Die Diagnose der neuen Milbe ist nachfolgende. Cheliceren schmäler als bei der typischen Form. Körper von milchweisser Farbe, glänzend ohne farbigen Schimmer (bei *echinopus* braun, rosa). Rostrum und Beine hellbraun. Umgebung der Genitalöffnung farblos, grau oder gräulich gelb, während sie bei der typischen Form rötlich ist. Kralle der Vordertarsen ganz sichelförmig gebogen, Basis und Spitze sehr weit auseinanderstehend (ungefähr so weit, wieviel die Höhe der Kralle beträgt); Tarsenspitzen etwas abgestutzt und bei der Ansicht von der Ventralseite, wo sich die Basis des sichelförmigen Dornes befindet, trapezförmig, während sie bei dem typischen *echinopus* gerundet-dreieckig sind (s. Abbildung).

Cephalothorax am vorderen und hinteren Ende mit je einem Paar Haare. Abdomen mit einem Paar langer seitlicher und mehreren kleinen Härchen; von der Mitte zum Ende des Abdomens folgen einander auf der Dorsalseite zuerst ein Paar langer, dann vier Paare kürzerer Haare; für *echinopus* sind charakteristisch zuerst ein Paar kurzer und danach 4 Paare mehr oder weniger langer Härchen. Männchen 0,77—0,78 mm, Weibchen 0,79—1 mm.

Die Milben wurden im Weizenkorn gefunden. Eine entscheidende Bedeutung in der Biologie der Form haben Temperatur und Feuchtigkeit: ein günstiges Medium ist Korn mit einer Feuchtigkeit von 16—18% und mehr. Das befallene Korn zeichnet sich durch dunklere Farbe aus und fühlt sich weich an. Solchen Körnern fehlt der Inhalt und die Hülle ist ganz mit Milben angefüllt. Diese dringen in das Korn von seinem Keim aus ein, indem sie allerlei verletzte Stellen benutzen; gewöhnlich wird die Hülle verletzt, unter welche die Milbe eindringt; mit dem Feuchterwerden des Kornes dringt die Milbe immer tiefer ein, wobei der Inhalt des Kornes allmählich zu einer breiigen Masse wird.

Die Eier sind weiss, gross und werden vorwiegend in die Körner an feuchten Stellen abgelegt.

Die Dauer des Nymphenstadiums beträgt 5—9 Tage, der Generation 20—30 Tage.

Pflanzenschutzinstitut f. d. Krim
Simferopol

Eingegangen
d. 18. V. 1935.